Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **littéraire**

Voie : **B/L**

Mathématiques

Première et seconde années

Classe préparatoire B/L
Programme de mathématiques

Table des matières

Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important dans la société et ont une importance grandissante dans les sciences humaines et sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif de ce programme est de permettre de manière équilibrée

- une formation par les mathématiques en tant que telles ;
- l'acquisition d'outils utiles notamment aux sciences sociales et à l'économie (probabilités et statistiques, introduction aux fonctions de deux variables par exemple).

L'objectif de la formation dans les classes préparatoires B/L n'est pas de former des professionnels des mathématiques. L'enseignement de mathématiques concourt à structurer la pensée des étudiants, à développer leurs capacités d'imagination et d'abstraction, et à les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...). Il permet aux étudiants d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel. L'état de l'art en sciences sociales et économie a été un guide important pour donner aux étudiants de B/L les bases dont ils auront besoin pour aller plus loin.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement de ces classes et décrit les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Il précise également certains points de terminologie et certaines notations. Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

1 - Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires B/L permet de développer chez les étudiants les compétences générales suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes notamment issus de problèmes de sciences sociales ou économiques) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

2 - Architecture des programmes

Par rapport au programme précédent, le programme d'algèbre linéaire donne une place plus importante aux aspects matriciels et introduit des bases de géométrie euclidienne qui pourront être illustrées par d'autres parties du programme. Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. À titre d'exemple, l'algèbre linéaire trouvera ainsi son application dans les problèmes d'optimisation, l'analyse et les probabilités dans les problèmes d'estimation.

Le programme a été rédigé sur deux années. Au sein de chaque année, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement. Le programme tient compte de l'évolution des programmes de Terminale tout en maintenant une exigence intellectuelle élevée adaptée aux étudiants de la filière B/L et à la place que prennent aujourd'hui les techniques quantitatives en sciences humaines et sociales.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus et des exemples d'activités ou d'applications.

Généralités

Concernant cette partie, le vocabulaire doit être connu et un savoir-faire est attendu. Aucune difficulté théorique ne sera soulevée. Certaines des notions peuvent être introduites en situation sans faire l'objet de chapitres spécifiques.

1 - Logique

Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée. Quantificateurs $\exists, \forall$.	Négation d'une phrase mathématique utilisant connecteurs et quantificateurs.
Raisonnement par l'absurde. Notion de condition nécessaire et de condition suffisante.	Introduit sur des exemples.

2 - Vocabulaire ensembliste

Appartenance, inclusion, notations $\in, \subset$. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.	
Complémentaire, notation $\bar{A}$. Union, intersection, notations $\cup, \cap$. Distributivité, lois de Morgan.	Lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques.
Définition du produit cartésien d'ensembles.	Exemples : $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^n$.
Applications, composition, restriction. Applications injectives, surjectives, bijectives.	Introduire ces notions en situation. Le vocabulaire doit être connu.

3 - Les nombres entiers

Notations $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$.	
Raisonnement par récurrence.	Il sera introduit sur des exemples.
Notations $\sum, \prod$. Définition de $n!$.	
Formules $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$	Savoir les retrouver.

4 - La droite réelle

Propriétés élémentaires des opérations de $(\mathbf{R}, +, \times)$. Manipulation d'inégalités. Intervalles. Valeur absolue, inégalité triangulaire.	La construction de $\mathbf{R}$ n'est pas au programme.
Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.	L'existence d'une borne supérieure (inférieure) pour toute partie non vide majorée (minorée) de $\mathbf{R}$ est admise.

5 - Le plan complexe

Partie réelle, partie imaginaire, conjugué d'un nombre complexe.	On donnera l'interprétation géométrique de ces notions.
Opérations, propriétés élémentaires de $(\mathbf{C}, +, \times)$, calcul du quotient en coordonnées cartésiennes.	
Module, argument, notation exponentielle, calcul du produit et du quotient en coordonnées polaires.	Lien avec la notion informelle de coordonnées polaires.
Formules d'Euler et de Moivre.	Lien avec les formules trigonométriques.
Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	Les formules de résolution sont exigibles, ainsi que leur démonstration.

Première année

I - Suites et séries de nombres réels

Limite (finie ou infinie) d'une suite.	On donnera la définition sans en faire un usage systématique.
Unicité de la limite.	
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations algébriques sur les suites convergentes.	
Passage à la limite dans des inégalités.	
Étude de convergence par encadrement.	
Comparaison entre les suites $n!, a^n, n^b, (\ln n)^c$.	
Suites monotones, limites des suites monotones.	Toute suite croissante admet une limite (finie ou infinie) qui est, si elle est majorée, la borne supérieure de ses termes (démonstration non exigible).
Suites définies par récurrence, suites géométriques, suites arithmétiques, suites arithmético-géométriques.	Aucune théorie générale n'est exigible sur les suites définies par récurrence.
Séries à termes positifs. Somme (finie ou infinie).	On pourra montrer l'existence d'une valeur limite (finie ou infinie) par la croissance des sommes partielles. Paradoxe de Zénon.
$\sum_k \sum_l a_{k,l} = \sum_l \sum_k a_{k,l}$	Résultat admis (les termes sont positifs).
Séries géométriques.	
Convergence des séries de Riemann $\sum n^{-a}$.	Résultat admis, la démonstration par comparaison avec l'intégrale pourra être traitée en exercice le moment venu.
Sommation d'inégalités.	Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, $\sum_n u_n \leqslant \sum_n v_n$. En particulier, si $\sum_n v_n$ est finie, alors $\sum_n u_n$ aussi.
$e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; pour $\|x\| < 1$, $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.	Admis. À part ces exemples, on ne fera aucune théorie sur les séries à termes non positifs.

II - **Algèbre linéaire**

L'accent sera mis dans la présentation de l'algèbre linéaire sur les sous-espaces de $\mathbf{R}^n$*, avec de nombreux exemples en dimension 2 ou 3 visant à développer l'intuition géométrique. Représenter un sous-espace vectoriel comme noyau d'une matrice revient à en donner un système d'équations. Représenter un sous-espace vectoriel comme image d'une matrice revient à en donner une description paramétrique. On montrera notamment comment passer d'un point de vue à l'autre.*

1 - L'espace $\mathbf{R}^n$

Définition de l'espace $\mathbf{R}^n$ des n-uplets de réels, interprétation géométrique comme vecteurs.	
Les opérations $+ : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ et $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Les propriétés : commutativité $x + y = y + x$; associativités $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$; opposé $x + (-1) \cdot x = 0$; distributivité $(a+b)\cdot(x+y) = a\cdot x+a\cdot y+b\cdot x+b\cdot y$.	On définira les opérations par leur expression algébrique en en donnant l'interprétation géométrique. Les propriétés pourront être démontrées à partir de la définition des opérations.
Notion de combinaison linéaire, définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.	
Classification des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.	Si le sous-espace n'est pas $\{0\}$, il contient un vecteur non nul e. Si tous les éléments du sous-espace sont proportionnels à e, c'est une droite vectorielle, sinon, c'est $\mathbf{R}^2$.
Représentation d'une droite vectorielle ou affine par équation ou par paramétrisation.	

2 - Matrices et systèmes linéaires

Matrices à coefficients réels. Application associée de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$.	$(x_i) \mapsto (\sum_j A_{ij}x_j)$
Définition d'une application linéaire de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^n$.	
L'application associée à une matrice est linéaire.	
Toute application linéaire est associée à une matrice.	
Somme de matrices, produit par un réel, propriétés.	Les opérations sur $\mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ vérifient les mêmes propriétés que celles de $\mathbf{R}^{mn}$.
Produit de matrices et composition.	
Systèmes linéaires, écriture sous la forme $A(x) = y$.	
Noyau d'une application linéaire. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.	

Algorithme de Gauss pour réduire un système linéaire (une matrice) à une forme échelonnée par opérations sur les lignes.

On donnera des exemples de résolution de systèmes linéaires (homogènes ou non) en utilisant l'algorithme de Gauss. Des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution, et où il existe plusieurs solutions seront traités. Dans ce dernier cas, on donnera une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions.

Le système $A(x) = 0$ a des solutions non triviales si A a moins de lignes que de colonnes.

Ce résultat sera utilisé en théorie de la dimension.

Détermination d'un système d'équations pour l'image d'une matrice (écriture de l'image d'une matrice comme noyau d'une autre matrice).

Matrice transposée, produit des transposées.

$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

3 - Matrices carrées inversibles

Dans cette section les matrices sont carrées (et réelles).

Matrice diagonale, triangulaire.

Résolution des systèmes linéaires associés.

Trace, trace d'un produit.

Matrice inversible, équivalence entre :

– le système $A(x) = y$ a une unique solution pour tout y ;
– il existe une matrice carrée B telle que $AB = I = BA$.

La matrice B est alors unique, c'est l'inverse de A, notée A^{-1}.
La solution du système $A(x) = y$ est $x = A^{-1}(y)$.

Calcul de l'inverse par pivot de Gauss.
Inverse d'un produit.
Les opérations sur les lignes correspondent à des multiplications à gauche par des matrices inversibles, matrices des opérations élémentaires.

Déterminant des matrices 2×2.

Une matrice 2×2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
La théorie générale des déterminants est hors programme.

4 - Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$

Le noyau et l'image d'une matrice sont des sous-espaces vectoriels.

Le noyau est l'ensemble des solutions du système $A(x) = 0$, l'image est l'ensemble des seconds membres y tels que le système $A(x) = y$ a une solution. L'image est aussi le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice.
Famille libre de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, base d'un sous-espace vectoriel, coordonnées dans une base. Base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Dans un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, une famille libre a un nombre d'éléments inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice. Toutes les bases ont le même nombre d'éléments.
Toute famille libre de $\mathbf{R}^n$ a au plus n éléments.

Pour la démonstration, on pourra utiliser qu'un système linéaire homogène ayant moins d'équations que d'inconnues a des solutions non triviales.

Existence d'une base pour tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, théorème de la base incomplète.
Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Trouver une base du noyau d'une matrice est une compétence exigible.
Si $E \subset F \subset \mathbf{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels, alors la dimension de E est inférieure ou égale à celle de F.

Dans un sous-espace vectoriel de dimension d, une famille libre à d éléments est une base, une famille génératrice à d éléments est une base.

5 - Applications linéaires entre sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$.

Noyau et image d'une application linéaire, rang.

Représentation par une matrice dans des bases.

Changement de bases, formule $A' = Q^{-1}AP$.

Toute application linéaire de rang r peut être représentée dans des bases appropriées par la matrice
$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet énoncé pourra être démontré en utilisant le théorème de la base incomplète ou en utilisant les opérations élémentaires. Il conduit au théorème du rang.

Théorème du rang.

Isomorphismes.
Une application linéaire entre sous-espaces vectoriels de même dimension est un isomorphisme si elle est injective, si elle est surjective.
Deux sous-espaces vectoriels isomorphes ont même dimension.

En particulier $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ ne sont pas isomorphes pour $n \neq m$.

6 - Rang d'une matrice

Le rang en lignes est égal au rang en colonnes.

On pourra se ramener à la matrice équivalente de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le rang est le nombre de lignes non nulles dans les formes échelonnées.
Toute matrice carrée inversible à droite (à gauche) est inversible.

7 - Espaces vectoriels

Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe $\cdot$, et d'une bijection f de E dans $\mathbf{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.

On ne considérera donc que des espaces vectoriels de dimension finie. Cette définition a pour but de permettre de discuter d'espaces autres que $\mathbf{R}^n$, mais aucune difficulté abstraite ne sera soulevée.

Applications linéaires entre espaces vectoriels, endomorphismes, isomorphismes.
Exemples : $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_n[x], \mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{R}), \mathcal{L}(E, F)$.

La notion d'indéterminée ne sera pas introduite.

Sous-espaces vectoriels et restrictions d'applications linéaires.
Bases d'espaces vectoriels, la dimension est aussi le cardinal des bases.

La bijection structurelle f permet de se ramener à la théorie de $\mathbf{R}^n$.

III - **Fonctions d'une variable réelle**

Un des objectifs principaux est de savoir étudier une fonction, tracer et interpréter son graphe.

Domaine de définition, tableau de variations, graphe d'une fonction.

On notera indifféremment une fonction de la variable x, quand le contexte est sans ambiguïté, par $x \mapsto f(x)$ ou simplement $f(x)$.

Graphe des fonctions x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\ln x$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $|x|$.

Ces graphes serviront d'illustrations aux concepts introduits dans cette section.

Fonctions périodiques, paires, impaires, majorées, minorées, bornées.
Fonctions monotones, strictement monotones.

1 - Limites et continuité

Limite (finie ou infinie) d'une fonction en un point, limite à gauche, limite à droite, limites en $\pm\infty$.

Les définitions seront interprétées graphiquement et illustrées par des exemples.
On remarquera, sans s'y attarder formellement, que la notion de limite en un point s'étend au cas d'une fonction non définie en ce point.

Opérations algébriques sur les limites.
Limites et composition (de deux fonctions ou d'une fonction et d'une suite).
Unicité de la limite, passage à la limite dans des inégalités.

Étude de convergence par encadrement.

$\lim_0 x^a |\ln x|^b$, $\lim_\infty x^a |\ln x|^b$, $\lim_{\pm\infty} |x|^a e^x$.

La démonstration de l'existence et de la valeur de ces limites n'est pas exigible.

Continuité, opérations sur les fonctions continues.
Les fonctions classiques sont continues sur leur domaine de définition : ln, exp, sin, cos, x^a, $|x|$.

La continuité est vraie par définition pour exp, elle est admise pour sin, cos. Elle sera démontrée pour ln en tant que fonction réciproque de exp.

Exemples de prolongement par continuité.

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné. Théorème des valeurs intermédiaires. Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son maximum et son minimum.	Résultat admis.
Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle admet une fonction réciproque sur l'intervalle image, qui est continue et strictement monotone. Graphe de la fonction réciproque par symétrie.	La fonction arctan sera introduite comme exemple.

2 - Dérivées

Dérivée, dérivée à gauche, dérivée à droite, interprétation graphique.	La dérivabilité implique la continuité.
Équation de la droite tangente au graphe en un point.	
Fonction dérivée. Cas des fonctions classiques : ln, exp, sin, cos, x^a.	
Méthodes de calcul (linéarité, produit, quotient, composition).	
Dérivée de la fonction réciproque.	Application au calcul de la dérivée de arctan.
Développement limité d'ordre 1.	
Dérivée et extremums.	Une fonction dérivable sur $[a, b]$ atteint son minimum en un point x_0. Si $x_0 \in]a, b[$ alors $f'(x_0) = 0$, si $x_0 = a$ alors $f'(a^+) \geqslant 0$, si $x_0 = b$ alors $f'(b^-) \leqslant 0$. Démonstration à partir du développement limité. Exemples. On fera remarquer qu'un point critique (c'est-à-dire un point où la fonction dérivée s'annule) n'est pas forcément un extremum.
Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.	Démonstration ce qui précède.
Inégalité des accroissements finis.	On donnera les versions de l'inégalité pour $m \leqslant f' \leqslant M$ et pour $\|f'\| \leqslant k$. Exemples d'application à la convergence de suites récurrentes.
Utilisation de la dérivée pour l'étude des variations.	Une fonction est constante sur un intervalle si et seulement si sa dérivée est identiquement nulle. Une fonction est croissante sur un intervalle si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle.
Une fonction dont la dérivée est strictement positive est strictement croissante.	On donnera la démonstration. On remarquera, sans formalisation, que le résultat reste vrai si la dérivée s'annule en un nombre fini de points.
Dérivées d'ordre supérieur, fonctions $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$.	On insistera plus sur les conclusions et l'utilisation des résultats que sur leurs hypothèses de régularité.

3 - Exemple d'étude de fonction : régression linéaire

On considère des données se présentant comme des couples de variables $(x_i, y_i), 1 \leqslant i \leqslant n$, où x_i est vue comme une variable explicative de y_i. En notant $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes, on cherche un coefficient a tel que $\bar{y} + a(x - \bar{x})$ soit une bonne approximation de y. On peut pour cela minimiser la somme des écarts quadratiques

$$\sum_i (y_i - \bar{y} - a(x_i - \bar{x}))^2.$$

En étudiant la fonction de a ci-dessus, on montre que la valeur optimale de a est

$$a = \frac{\sum_i((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

C'est le britannique Francis Galton qui a introduit la méthode au 19e siècle pour étudier la taille des enfants y_i en fonction de la taille des parents x_i, obtenant un coefficient $a \approx 2/3$. Le fait que $a > 0$ signifie que les enfants sont (en moyenne) plus grands que la moyenne lorsque les parents le sont. Le fait que $a < 1$ signifie un retour vers la moyenne, « regression towards the mean » en anglais, d'où le nom de la méthode. Les explications génétiques que Galton donna de ce phénomène sont aujourd'hui considérées comme incorrectes.
On pourra interpréter cette valeur comme

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\mathrm{Var}(x)},$$

en lien avec le cours de probabilités.

4 - Intégration

Définition informelle de l'intégrale $\int_a^b f$ comme aire algébrique.

On ne soulèvera pas de difficulté sur la régularité de f, on limitera la discussion aux fonctions continues.

Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, monotonie.
Inégalité de la moyenne.

Les propriétés ne seront pas démontrées, mais interprétées en termes géométriques.

La fonction $\int^x f$ est une primitive de f.
Les primitives de f diffèrent d'une constante additive.

Démonstration à partir des propriétés de l'intégrale.

Relation $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Vraie pour toute primitive F de f.

Primitives de fonctions usuelles : e^x, x^a, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$.

Calcul d'intégrales : intégration par parties, changements de variable.

Il n'est pas attendu des étudiants qu'ils sachent trouver eux-mêmes les bons changements de variable, sauf dans quelques cas simples comme les changements affines.

IV - **Probabilités**

L'esprit du programme de probabilités est de familiariser les étudiants au concept de variables aléatoires et de leur indépendance, dont la partie statistique, en deuxième année, peut être vue comme un aboutissement. Les variables aléatoires finies ou discrètes sont plus à envisager comme un contexte dans lequel certaines des propriétés importantes peuvent être démontrées de manière simple que comme une source d'exercices de dénombrement.

1 - Événements aléatoires

Univers Ω, ensemble $\mathcal{E}$ des événements.

$\mathcal{E}$ est un ensemble de parties de Ω. On ne soulèvera pas de difficultés sur l'ensemble $\mathcal{E}$.

Événement A et B, événement A ou B, événement contraire, événements incompatibles, famille complète d'événements.

Lien avec les opérations ensemblistes. On mentionnera que la réunion d'une suite d"événements est un événement.

Probabilité $P : \mathcal{E} \to [0,1]$, axiomes :
$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$;
$P(A) \leqslant P(B)$ si $A \subset B$;
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$;
$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$ si A_i est une suite d'événements deux à deux disjoints.

Probabilité conditionnelle sachant un événement B de probabilité non nulle :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On remarque que $P_B : \mathcal{E} \to [0,1]$ est une probabilité.

Formule des probabilités composées :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Formule des probabilités totales :
$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$.

(B_i) est une famille complète d'événements de probabilité strictement positive.

Formules de Bayes :

On donnera des applications concrètes de ces formules.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

(A_i) est un système complet d'événements, tous les événements sont de probabilité non nulle. On donnera des applications concrètes.

2 - Variables aléatoires discrètes

On considère ici une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble $\mathcal{X} \subset \mathbf{R}$ de la forme $\mathcal{X} = \{x_i, i \in I\}$, où I est soit $\mathbf{N}$, soit $\mathbf{Z}$, soit un ensemble fini.

Une variable aléatoire sur $\mathcal{X}$ est une fonction $X : \Omega \to \mathcal{X}$ telle que $X^{-1}(\{x\}) = \{X = x\}$ est un événement pour tout $x \in \mathcal{X}$. La loi de la variable aléatoire est la fonction $x \mapsto p(x) := P(X = x)$. $\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) = 1$ Pour toute partie $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, $$P(X \in \mathcal{X}') = \sum_{x\in\mathcal{X}'} p(x).$$	$(\{X = x\}, x \in \mathcal{X})$ est une famille complète d'événements.
Fonction de répartition, quantiles.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$.
Variable de Bernoulli, loi de Bernoulli.	L'indicatrice de l'événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
Loi uniforme sur un ensemble fini.	

3 - Moments des variables aléatoires discrètes réelles positives

Les variables aléatoires sont positives dans cette partie.

Espérance des variables aléatoires positives.	On évoquera l'espérance des variables aléatoires finies de signe quelconque.
Moment d'ordre k (k-moment) $E(X^k) \in [0, \infty]$.	Formule de transfert. Une variable prenant un nombre fini de valeurs a des moments finis.
Inégalité $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$.	Admise, mais on pourra par la suite faire le lien avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Une variable de second moment fini est donc de premier moment fini.
Propriétés de l'espérance : linéarité, monotonie.	La linéarité est admise.
Variance des variables de moment d'ordre 2 fini : $V(X) = E((X - E(X))^2)$, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $V(aX + b) = a^2V(X)$.	Définition de l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Puisque $V(\|X\|) \geqslant 0$ on retrouve l'inégalité $E(\|X\|)^2 \leqslant E(X^2)$ dans le cas des variables de moment d'ordre 2 fini.
Si $V(X) = 0$, la variable X est constante en dehors d'un événement de probabilité nulle. Si X est une variable de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p, V(X) = p(1 - p)$. Inégalité de Markov : $$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$ si X est une variable aléatoire à valeurs positives et $a > 0$.	

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

si X est une variable aléatoire de second moment fini et $a > 0$.

Covariance de deux variables aléatoires finies :
$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$
$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Coefficient de corrélation de variables aléatoires finies :

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

Invariance d'échelle :
$\mathrm{Cor}(X, Y) = \mathrm{Cor}(aX + b, cY + d)$
pour $a > 0$, $c > 0$.

4 - Indépendance

Indépendance de deux événements :
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Les événements A et B (avec $P(B) \neq 0$) sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$.

Indépendance de variables aléatoires discrètes.

Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, à valeurs dans $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ sont dites indépendantes si, pour toutes parties $A_1 \subset \mathcal{X}_1, \ldots, A_n \subset \mathcal{X}_n$,

$$P((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n).$$

Deux variables de Bernoulli B_1 et B_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $\{B_1 = 1\}$ et $\{B_2 = 1\}$ sont indépendants.

Les variables discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \ldots P(X_n = x_n)$$

pour tout $x_1 \in \mathcal{X}_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}_n$.

La covariance de deux variables indépendantes est nulle.

Cette condition n'est pas suffisante.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l$ sont des variables indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_k), Y_1, \ldots, Y_l$ sont indépendantes pour toute fonction f.

On ne soulèvera aucune difficulté sur la notion de fonction de plusieurs variables.

Si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de second moment fini, alors
$E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$
et $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.

Démonstration dans le cas fini.

5 - Processus de Bernoulli

On considère dans cette section une suite $X_i, i \in \mathbf{N}^*$ de variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. L'indépendance signifie ici que, pour tout n, les variables $X_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ sont indépendantes.

Soit T l'indice du premier 1. Alors T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$. Sa loi est la loi géométrique :

$$P(T = n) = p(1-p)^{n-1}$$

$$P(T > n) = (1-p)^n.$$

Notation $\mathcal{G}(p)$ de la loi géométrique de paramètre p.

Les lois géométriques satisfont la propriété

$$P(T > j + k \mid T > j) = P(T > k).$$

On pourra remarquer que cette propriété caractérise les lois géométriques, mais la démonstration n'est pas exigible.

Moments : $E(T) = 1/p, V(T) = (1-p)/p^2$.

On présentera le calcul de l'espérance en admettant la dérivation sous le signe somme.

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. La loi de S_n est la loi binomiale de paramètres n et p :

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On introduira à cette occasion les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ de manière combinatoire et la notation $\mathcal{B}(n, p)$ pour la loi binomiale de paramètres n et p.

Relations :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Triangle de Pascal.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Relation

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Lien avec la loi binomiale de paramètres n et $p = a/(a+b)$ lorsque a et b sont positifs.

Moments :
$E(S_n) = np, V(S_n) = nV(X_1) = np(1-p)$.

La somme de deux variables binomiales indépendantes de paramètres (k, p) et (l, p) est une variable binomiale de paramètres $(k + l, p)$.

On justifiera ce résultat en interprétant cette somme comme une somme de $(k + l)$ variables de Bernoulli indépendantes.

Loi de Poisson de paramètre λ :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Notation $\mathcal{P}(\lambda)$.

Moments d'une variable X suivant une loi de Poisson de paramètre λ :
$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$.

On présentera le calcul de l'espérance en admettant la dérivation sous le signe somme.

On démontrera la convergence quand $n \to \infty$ de la suite de lois binomiales de paramètres n et p_n vers la loi de Poisson de paramètre λ si $np_n \to \lambda$:

$$\forall k \quad \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Il s'agit ici d'une convergence pour chaque k. On ne discutera pas le concept de convergence en loi en général.
Interprétation, paradigme de Poisson :
La somme S_n d'un grand nombre de variables de Bernoulli indépendantes de petit paramètre suit approximativement la loi de Poisson de paramètre $E(S_n)$.
On illustrera ce paradigme par des exemples concrets.
Exemple : dans un texte, le nombre de coquilles par page peut être modélisé par une loi de Poisson. Si, dans une collection de qualité et de pagination homogènes, le nombre moyen de coquilles par page a été estimé à $1/2$, la probabilité qu'une page donnée ne contienne pas de coquille est de 60% environ.

Deuxième année

I - Algèbre et géométrie

Comme en première année, les scalaires sont réels, et le contexte est celui de $\mathbf{R}^n$ (ou, éventuellement, d'espaces isomorphes à $\mathbf{R}^n$ comme $\mathbf{R}_k[x]$ et $\mathbf{M}_{k,l}(\mathbf{R})$) et de ses sous-espaces.

1 - Somme directe, supplémentaire

Somme de sous-espaces vectoriels.	$E+F=\{x+y, x\in E, y\in F\}$.
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels, caractérisation par l'intersection.	La réunion d'une base de E et d'une base de F est une base de $E \oplus F$.
Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un autre, dimension des supplémentaires.	Si F est un sous-espace vectoriel, et E un sous-espace vectoriel de F, alors E admet un supplémentaire dans F.
Projection sur E parallèlement à F. Tout endomorphisme P vérifiant $P^2 = P$ est une projection.	$F = \ker P, E = \ker(P-I)$
Symétrie par rapport à E le long de F. Tout endomorphisme S vérifiant $S^2 = I$ est une symétrie.	$F = \ker(S+I), E = \ker(S-I)$ Cette définition inclut le cas $S = I$.

2 - Valeurs propres des endomorphismes

Représentation d'un endomorphisme dans une base par une matrice carrée, changement de base, formule $A' = P^{-1}AP$.

Valeurs propres, vecteurs propres.

Des vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont distinctes forment une famille libre.

Endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable.

Une matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle il est représenté par une matrice diagonale.

Une application linéaire d'un sous-espace vectoriel E dans lui-même est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de cette application linéaire.

Si une matrice carrée $n \times n$ admet n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Diagonalisation pratique des matrices 2×2.

3 - Produit scalaire

Seul le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$ sera étudié, aucun développement sur les espaces euclidiens plus généraux n'est au programme.

Définition du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$ et de la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

La convergence de la suite $(\|x^{(m)}\|)$ vers 0 est équivalente à celle de chacune des suites de coordonnées $(x_i^{(m)})$.

Bilinéarité et symétrie du produit scalaire

Formule $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^{\mathrm{T}}y\rangle$.

Orthogonalité entre deux vecteurs. Théorème de Pythagore : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si x et y sont orthogonaux.

Familles orthogonales, orthonormées, base orthonormée.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille orthonormée se complète en une base orthonormée.

Coordonnées dans une base orthonormée.

$x = \sum_i \langle e_i, x\rangle e_i, \quad \|x\|^2 = \sum_i \langle e_i, x\rangle^2$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|\|y\|$.

Démonstration possible : Dans une base orthonormée telle que $\|x\|e_1 = x$, on a :

$$\|y\|^2 = \sum_i \langle e_i, y\rangle^2 \geqslant \langle e_1, y\rangle^2.$$

Inégalité triangulaire $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
Distance $\|x-y\|$.

Boule, sphère de centre et de rayon donnés.	
Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace vectoriel. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en est un supplémentaire.	
Pour tout sous-espace vectoriel E, $E^{\perp\perp} = E$.	Une base de l'orthogonal donne un système d'équations du sous-espace.
Hyperplans.	L'orthogonal d'un vecteur non nul est un hyperplan. Deux vecteurs orthogonaux à un même hyperplan sont colinéaires.
Projection orthogonale P_E sur un sous-espace E muni d'une base orthonormée (e_i) (c'est la projection sur E parallèlement à $E^\perp$).	$P_E(x) = \sum_i \langle e_i, x\rangle e_i$ Le projeté $P_E(x)$ de x sur E est le point de E le plus proche de x. La distance au sous-espace E est $\|x - P_E(x)\|$.

II - Étude locale des fonctions d'une variable réelle

1 - Fonctions polynomiales

Étude de polynômes, limites en $\pm\infty$. Racines (réelles), tout polynôme de degré impair admet une racine.	Les polynômes sont à coefficients réels et sont vus comme des fonctions d'une variable réelle.
Factorisation d'un polynôme par $(x - x_0)$ si x_0 est une racine.	L'existence d'une factorisation est admise, mais savoir factoriser en pratique est exigible.
Multiplicité d'une racine : la racine x_0 est de multiplicité k si $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$, avec $g(x_0) \neq 0$. Un polynôme change de signe en une racine si et seulement si sa multiplicité est impaire.	Si x_0 est une racine de f de multiplicité $k \geqslant 2$, alors c'est une racine de f' de multiplicité $k-1$.
Un polynôme f admet un extremum local en x_0 si et seulement si x_0 est une racine de f' de multiplicité impaire.	Les étudiants doivent connaître le cas $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$.

2 - Développements limités

On se limitera autant que possible à l'ordre 2 ou 3 et on ne cherchera aucune technicité.

Développements limités, formule de Taylor Young (admise). Unicité du développement limité.	Quelques exemples simples de calcul de limite à l'aide de développements limités.
Développement limité de e^x et $(1-x)^{-1}$ à tout ordre. Premiers termes de $(1+x)^a$ et $\ln(1+x)$.	
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k + x^k \varepsilon(x),$$ où $k \geqslant 2$ et $a_k \neq 0$.	La forme du graphe en un point dépend principalement du premier terme non linéaire du développement limité. Exemples avec $k = 2$ ou $k = 3$.

Lien avec les extremums locaux et les points d'inflexion.

En un minimum local à l'intérieur du domaine de définition, le coefficient a_2 d'ordre 2 du développement limité vérifie $a_2 \geqslant 0$.
Un point où $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$ est un minimum local.

Détermination de l'asymptote oblique d'une fonction en l'infini. Position par rapport à l'asymptote.

Étude de la fonction e^{-x^2}.

La forme du graphe doit être connue.

3 - Intégrales généralisées

Notion d'intégrale généralisée pour des fonctions positives, du type

$$\int_a^b f \in [0, \infty]$$

où a ou b peuvent être infinis et où f est continue sur $]a, b[$.

On donnera la définition comme limite tout en évoquant une notion informelle directe comme une aire (finie ou infinie).
Les deux terminologies pourront être employées : intégrale convergente (divergente) ; intégrale finie (infinie).

Extension des propriétés de linéarité, de monotonie, et de la relation de Chasles à ce cadre.

Admises.

$\int_0^\infty e^{-t} \mathrm{d}t = 1$.

$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

Valeur admise, on pourra toutefois démontrer la convergence par comparaison.

Conditions de convergence de $\int_0 t^{-a} \mathrm{d}t$ et $\int^\infty t^{-a} \mathrm{d}t$.

III - Fonctions de deux variables réelles

Le niveau de formalisme de cette partie sera minimal. On ne cherchera pas à préciser les hypothèses générales des résultats. Aucune notion précise sur la classe de régularité d'une fonction de deux variables n'est exigible. Les fonctions seront le plus souvent définies sur le plan $\mathbf{R}^2$ tout entier. Dans le cas contraire, on ne soulèvera aucune difficulté liée au bord de l'ensemble de définition.

Notation $f(x) = f(x_1, x_2)$.

1 - Exemples

Graphe, lignes de niveau. Étude d'exemples, notamment les suivants (allure du graphe et des lignes de niveau) :

Fonctions coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ et $(x_1, x_2) \mapsto x_2$.

Fonctions linéaires $ax_1 + bx_2$.

Le vecteur (a, b) est orthogonal aux droites de niveau.

2 - Dérivées partielles

Dérivées partielles.

Notations $\partial_1 f$, $\partial_2 f$.

Définition d'un extremum local, condition nécessaire : $\partial_1 f = 0 = \partial_2 f$.
Point critique, tout minimum local est un point critique.

Le point x_0 est un minimum local s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant f(x_0)$ dans le disque $B(x_0, \delta)$. On ne discutera pas d'extremum atteint au bord du domaine de définition.
Démonstration des conditions d'optimalité à l'aide des fonctions $t \mapsto f(t, x_2)$ et $t \mapsto f(x_1, t)$.

3 - Fonctions quadratiques

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

La fonction quadratique a un extremum local (strict) en 0 si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2 - ac$ est (strictement) négatif.
Détermination (dans les cas $\Delta < 0$) du type d'extremum en fonction du signe de a et c.

4 - Retour sur la régression linéaire

Il n'est pas demandé aux étudiants de connaître les résultats de cet exemple, mais de savoir les retrouver.

Dans la présentation classique de la régression linéaire, on cherche deux coefficients a et b tels que $b + ax$ soit une aussi bonne approximation que possible de y. On minimise pour cela la fonction

$$f(a, b) = \sum_i \left(y_i - b - ax_i\right)^2,$$

et on retrouve $a = \mathrm{Cov}(x, y)/\mathrm{Var}(x)$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

On trouve le point critique en calculant les dérivées partielles. On remarque que c'est la même approximation que dans la première approche.
On pourra justifier que c'est un minimum par l'interprétation géométrique suivante. Dans l'espace $\mathbf{R}^n$ (n est le nombre de données), on considère $e = (1, \ldots, 1)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. La fonction $f(a, b)$ s'interprète comme le carré de la distance entre les points y et $ax + be$. Les valeurs optimales de a et b correspondent donc à l'unique point $ax + be$ du sous-espace $E = \mathrm{Vect}(e, x)$ tel que $y - (ax + be)$ est orthogonal à E. En écrivant le système

$$\langle y - (ax + be), x\rangle = 0, \langle y - (ax + be), e\rangle = 0,$$

on retrouve bien

$$a = \frac{\langle e, e\rangle\langle x, y\rangle - \langle x, e\rangle\langle y, e\rangle}{\langle e, e\rangle\langle x, x\rangle - \langle x, e\rangle^2}, \ b = \frac{\langle y, e\rangle - a\langle x, e\rangle}{\langle e, e\rangle}.$$

5 - Étude des points critiques

Dérivées partielles d'ordre 2.

Notations $\partial^2_{1,1}f, \partial^2_{1,2}f, \partial^2_{2,1}f, \partial^2_{2,2}f$

Égalité $\partial^2_{1,2}f(x) = \partial^2_{2,1}f(x)$.

Admis.

Soit x un point critique de f. Si le discriminant de la fonction quadratique

$$q(y_1, y_2) = \partial^2_{1,1}f(x)y_1^2 + 2\partial^2_{1,2}f(x)y_1y_2 + \partial^2_{2,2}f(x)y_2^2$$

est strictement négatif, alors la fonction f a un extremum local en x, qui est de même nature que celui de la fonction q en 0.

Admis.

IV - Probabilités

1 - Variables aléatoires à densité

Soit ρ une fonction positive de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire de densité ρ si, pour tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbf{R}$, l'ensemble $\{X \in]a, b[\}$ est un événement et

$$P(X \in]a, b[) = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

On se limitera au cas de densités ρ continues (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
On remarquera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho = P(\Omega) = 1.$$

Si X est une variable à densité, alors
$P(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$

Un événement de probabilité nulle n'est pas forcément impossible.

Fonction de répartition :
$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \rho$.

La fonction de répartition caractérise la densité (si la densité est continue).

Inverse (réciproque) de la fonction de répartition et quantiles.

Exemples de calcul de fonctions de répartition et de densités de variables images $f \circ X$ avec f monotone.

Loi uniforme sur un intervalle borné.

Moments :
$\int_{\mathbf{R}} |x|^k \rho(x)dx = \int_0^{\infty} x^k(\rho(x) + \rho(-x))dx$.

Espérance des variables à densité de premier moment fini :

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\rho(x)dx - \int_0^{\infty} x\rho(-x)dx.$$

Cette expression de l'espérance permet de ne manipuler que des intégrales de fonctions positives.

Propriétés de l'espérance : linéarité, monotonie.

Admises.

Variance $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$,
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Définition de l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variable

$$X^* := \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée réduite.

Elle a pour densité

$$\rho^*(x) = \sigma(X)\rho\big(E(X) + \sigma(X)x\big).$$

Inégalité de Markov :

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

si X est une variable aléatoire à valeurs positives et $a > 0$.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

si X est une variable aléatoire de second moment fini et $a > 0$.

2 - Loi normale, loi exponentielle

Une variable aléatoire gaussienne (ou normale) centrée réduite est une variable X admettant la densité

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On a $E(X) = 0$, $V(X) = 1$.
La variable $Y = \sigma X + E$ est alors une variable gaussienne (ou normale) de moyenne E et de variance σ^2, elle admet la densité

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-E)^2/2\sigma^2}.$$

Loi exponentielle : $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $\mathbf{R}_+$
$E(X) = 1/\lambda$, $V(X) = 1/\lambda^2$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $P(X > x) = e^{-\lambda x}$.
Les lois exponentielles satisfont la propriété

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s),$$

pour tous réels s et t positifs ou nuls.

Cette propriété caractérise les lois exponentielles (démonstration non exigible).
Les lois exponentielles s'interprètent comme les lois de durée de vie sans vieillissement. Ce sont des variantes continues des lois géométriques.

3 - Indépendance de variables à densité

Les variables aléatoires à densité $X_1, \ldots, X_n$ sont dites indépendantes si

$$P((X_1 \in I_1) \cap \cdots \cap (X_n \in I_n)) = P(X_1 \in I_1) \cdots P(X_n \in I_n)$$

pour tous intervalles I_k de $\mathbf{R}$.

On limitera l'utilisation de cette définition.

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes :
$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$,
$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$.

Propriété admise. La loi d'une somme de variables aléatoires est hors programme.

On pourra, comme en première année, introduire la covariance et le coefficient de corrélation sans discuter les problèmes de définition des intégrales.
Cov $(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y)))$,
Cov $(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,
Cor $(X, Y) = \dfrac{\text{Cov }(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.
La covariance de deux variables indépendantes est nulle (condition non suffisante).

4 - Statistiques

Soit X une variable aléatoire (discrète ou à densité). Soient X_i, $i \in \mathbf{N}^*$, des variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On considère les variables aléatoires $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

$E(\bar{X}_n) = E(X), V(\bar{X}_n) = V(X)/n$.

Loi faible des grands nombres :

$$P(|\bar{X}_n - E(X)| \geqslant \varepsilon) \to 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.
Intervalle de confiance :
La probabilité que l'intervalle

$$\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{V}{na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{V}{na}}\right]$$

contienne $E(X)$ est supérieure ou égale à $1 - a$.

Démonstration dans le cas $V(X) < \infty$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|\bar{X}_n - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{V(\bar{X})}{n\varepsilon^2}.$$

On discutera la notion d'intervalle de confiance au niveau $1 - a$. On démontrera l'énoncé ci-contre à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
En pratique :
La variance V est souvent inconnue, mais on peut la majorer :
dans le cas général d'une variable aléatoire bornée $|X| \leqslant M$, par M^2 ;
dans le cas d'une variable de Bernoulli, par $1/4$.
Application numérique :
Pour $n = 1000$, au seuil de confiance de 90%, l'incertitude est de 5% pour une variable de Bernoulli.

