Programme de mathématiques en TB1

Objectifs de formation

La place des Mathématiques dans la formation scientifique

L'objectif de l'enseignement des mathématiques en classe préparatoire TB est double.

D'une part il contribue à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux étudiants un accès à quelques domaines fondamentaux (algèbre linéaire, analyse, probabilités). La pratique du raisonnement mathématique concourt ici comme ailleurs à la formation de l'esprit d'un futur scientifique ; la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, le contrôle et l'analyse des hypothèses, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

D'autre part, il contribue à fournir des représentations et un langage dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une coordination aussi bonnes que possible entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambigüités dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

L'objectif est de former des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques dans diverses situations issues du métier d'ingénieur.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les élèves des techniques classiques et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maitrise s'acquiert notamment grâce à des exercices variés. Le temps des travaux dirigés se prête également à l'expérimentation numérique, en lien avec l'enseignement d'informatique.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés (TIPE).

Le développement des compétences

L'enseignement des mathématiques en filière TB vise au développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte souvent complexe.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants leur permet de gérer leurs apprentissages de manière responsable en repérant points forts et points faibles. Ces compétences prennent tout leur sens dans le cadre de la résolution de problèmes, de leur modélisation ou formalisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite.

De manière spécifique, on peut distinguer les compétences suivantes :

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies	Il s'agit d'analyser un problème, de se poser des questions, d'expérimenter sur des exemples, de formuler des conjectures.
Modéliser	C'est traduire un phénomène en langage mathématique, élaborer des concepts et des outils lors d'une phase d'abstraction ou de conceptualisation.
Représenter, changer de registre	Il s'agit de choisir le registre (numérique, algébrique, géométrique) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, et d'être capable de passer d'un registre à un autre, d'un mode de représentation (souvent visuelle : courbes, graphes, arborescences, tableaux) à un autre.
Raisonner et argumenter	Cela consiste à effectuer des inférences (inductives et déductives), à conduire une démonstration, à confirmer ou infirmer une conjecture, et enfin à évaluer la pertinence d'un concept au regard du problème posé.
Calculer, manipuler des symboles et maitriser le formalisme mathématique	C'est effectuer un calcul à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel), organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations et effectuer des simplifications, contrôler les résultats, mettre en œuvre des algorithmes, manipuler et exploiter des expressions symboliques, comprendre et utiliser le langage mathématique.
Communiquer à l'écrit et à l'oral	Il s'agit de comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, d'opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel, de rédiger une solution rigoureuse, de présenter et de défendre une production mathématique pour convaincre un interlocuteur ou un auditoire.

Mises en œuvre dans des situations et contextes spécifiques, les diverses compétences peuvent être déclinées en un certain nombre de capacités. À titre indicatif, dans chaque chapitre est dressée une liste non exclusive de quelques capacités susceptibles d'être exercées en situation sur certaines des connaissances décrites dans ce chapitre, et permettant d'observer *in situ* la réalisation de certaines des six compétences.

Première année

Préambule

Le programme de la filière TB se situe dans la continuité de ceux du lycée et des séries STL et STAV.

L'enseignement des mathématiques dans cette filière doit être principalement basé sur les applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela s'avère possible avec les enseignements de physique, de chimie, de biotechnologies et de biologie, en évitant les développements formels ou purement théoriques. Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparait à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes biologiques, physiques ou chimiques. Ces interprétations, conjointement avec les interprétations géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire ou des probabilités. C'est pourquoi apparait parfois, dans la colonne de commentaires, le symbole $\leftrightharpoons$ pour signaler des possibilités d'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques.

La présentation de l'**algèbre linéaire** est faite par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Seule la présentation de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est envisagée. La **géométrie** est profondément intégrée dans l'étude de l'algèbre linéaire qui lui confère un cadre commode et rigoureux.

Dans la partie du programme consacrée à l'**analyse**, le but est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et surtout sur les fonctions. L'analyse est un outil pour les probabilités et pour les autres sciences et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire, tout en évitant les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.

La partie relative aux **probabilités** vise à consolider et à développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste, initiée dès la classe de Troisième et poursuivie jusqu'en classe Terminale. L'accent est mis sur une prise en main élémentaire du langage de la théorie des ensembles, les techniques élémentaires de dénombrement et sur les espaces probabilisés finis. Tout ce qui concerne les variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est infini est traité en seconde année.

Le programme est organisé en deux grandes parties de volume sensiblement équivalent, conçues pour être traitées dans l'ordre au cours de deux semestres ; en revanche, au sein de chaque partie, aucun ordre particulier entre les chapitres ni même entre les paragraphes n'est imposé. L'ordre proposé dans le présent programme assure une bonne cohérence dans l'apparition des nouveaux concepts, mais il n'est pas le seul possible.

Enfin, les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Premier semestre

Outils et calculs

L'objectif de ce chapitre est de consolider et de compléter les acquis des classes antérieures afin que ces outils soient familiers aux étudiants.

Les ensembles **N**, **Z**, **R** sont supposés connus.

Capacités : démontrer par récurrence ; manipuler des égalités et des inégalités ; calculer sur des nombres réels.

Contenus	**Commentaires**
a) Nombres entiers	
Raisonnement par récurrence.	La familiarisation avec raisonnement par récurrence est progressive et consolidée au fil de différents chapitres.
b) Nombres réels	
Intervalles.	On se limite à une simple description des différents types d'intervalles.
Valeur absolue.	Interprétation de la valeur absolue en termes de distance.
Exposants (entiers), racine carrée.	On attend une maitrise des formules $(xy)^n = x^n y^n$, $x^{n+m} = x^n x^m$, $(x^n)^m = x^{nm}$, $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
Identités remarquables.	Les attendus se limitent aux formules suivantes (dans **R** ou **C**) : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Manipulation des inégalités.	Il s'agit d'une simple reprise des règles de calcul algébrique sur les inégalités.

Contenus (suite)	Commentaires
Résolutions d'équations et d'inéquations simples.	Il s'agit d'une reprise de quelque sortes d'équations et inéquations abordées dans les classes antérieures.
c) Sommations	
Notation $\sum$.	On précise qu'une somme ayant un ensemble d'indices vide est nulle.
Règles de calcul.	Linéarité, découpage (ou relation de Chasles), changement d'indices par translation. L'introduction du symbole Σ doit être progressive.
d) Factorielles et coefficients binomiaux	
Factorielle, notation $n!$.	
Somme de termes consécutifs d'une progression géométrique : $\sum\limits_{0\leq k\leq n} q^k = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.	La raison q est dans $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.
Sommes des n premiers entiers et des n premiers carrés.	
Coefficients binomiaux.	On adopte la définition suivante : $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<0 \text{ ou } k>n \\ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sinon.} \end{cases}$
Triangle de Pascal. Formule du binôme.	On met en valeur les formules : $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Travaux dirigés

Résolutions d'équations (simples).
Calculs simples sur les coefficients binomiaux.
⥊ Au cours du travail sur les puissances, on peut faire un lien avec quelques unités employées en physique, biologie ou biotechnologies et avec les analyses dimensionnelles correspondantes. On relie aussi le calcul sur les puissances entières avec la recherche des ordres de grandeur.

Nombres complexes et trigonométrie

Les nombres complexes sont introduits dans ce programme en raison de leur importance dans tous les domaines des mathématiques, en particulier en analyse. De nombreuses modélisations les utilisent.

On s'appuiera largement sur la notion de plan complexe et les images géométriques correspondantes. L'introduction des nombres complexes dans ce programme n'a cependant pas pour objectif la résolution de problèmes purement géométriques.

Capacités : calculer sur des nombres complexes ; employer le cercle trigonométrique pour mettre en évidence des formules sur les fonctions trigonométiques ; employer des formules pour résoudre des équations ou des problèmes faisant intervenir la trigonométrie.

Contenus	Commentaires
a) Nombres complexes	
Représentation géométrique d'un nombre complexe ; nombres complexes conjugués ; affixe d'un point, d'un vecteur.	La construction théorique du corps des complexes est hors programme.
Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	La résolution des équations du second degré à coefficients complexes est hors programme.
b) Module et argument d'un nombre complexe	
Définition, module d'un produit, inégalité triangulaire.	Les illustrations géométriques ont pour seul objectif l'aide à l'acquisition de ces connaissances.
Nombres complexes de module 1 ; argument d'un nombre complexe non nul, notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.	L'argument d'un nombre complexe est mis en lien avec l'angle polaire d'un vecteur.
Relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, lien avec les formules de trigonométrie.	L'étude des racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe, y compris les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, est hors programme.

Contenus (suite)	Commentaires
Formules d'Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ Définition de e^z pour z complexe, formule $e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$.	Ces formules doivent être étudiées assez tôt dans l'année pour être utilisées dans les autres disciplines.
c) Trigonométrie Définition de $\tan(\theta)$.	On reprend à cette occasion les définitions et propriétés connues des sinus et cosinus (vues classe de Première).
Périodicité et symétries de cos, sin, tan.	On fait le lien avec les symétries agissant sur le cercle trigonométrique.
Formules de trigonométrie.	$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\sin(\alpha\pm b)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$ $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$ $=2\cos^2(\theta)-1=1-2\sin^2(\theta)$ $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$ Les autres formules de trigonométrie ne sont pas des attendus du programme.

Travaux dirigés

Exemples de mise en œuvre de la formule d'Euler.
Linéarisation de $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ pour de petites valeurs de p et q.
⇋ Transformation de $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$ en $r\cos(\theta+\varphi)$.

Algèbre linéaire 1 – Systèmes d'équations linéaires

En première année, on n'étudie que les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}$, où n est inférieur ou égal à 4, et des systèmes d'équations linéaires comportant au maximum quatre équations et quatre inconnues. Le cas particulier des systèmes à deux équations et deux inconnues, plus fréquemment rencontré dans d'autres disciplines, est mis en valeur et repris dans le chapitre suivant.

Capacités : mettre en place une recherche de pivots sur un système linéaire ; mener une démarche de résolution d'un système linéaire ; discuter de l'existence des solutions d'un système linéaire.

Contenus	Commentaires
Opérations élémentaires sur les lignes : elles transforment le système en un système équivalent.	Les opérations élémentaires sont : multiplier une équation par un scalaire non nul, ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres.
Un système linéaire a zéro, une unique ou une infinité de solutions.	Ce fait peut être, à ce stade, suggéré par quelques exemples et sera justifié ultérieurement (méthode du pivot ou théorie du rang).
Réduction d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.	On définit à cette occasion le rang d'un système linéaire comme le nombre de pivots ; on admet qu'il ne dépend pas de la manière de choisir les pivots.
Interprétations géométriques pertinentes pour un système linéaire à deux ou trois inconnues.	Dans le cas de deux inconnues, on interprète le système linéaire comme un problème d'intersection de droites affines. Pour trois inconnues, il convient de présenter une équation du type $ax+by+cz=d$ comme celle d'un plan, ce qui permet d'interpréter le système étudié comme un problème d'intersection de deux ou trois plans ou d'une droite et d'un plan. Aucune connaissance théorique sur ces questions n'est exigible.

Travaux dirigés

Pratique de la résolution d'un système d'équations linéaires à coefficients numériques par l'algorithme du pivot de Gauss.

$\leftrightarrows$ Équilibrage de réactions chimiques (recherche de coefficients stœchiométriques).

Algèbre linéaire 2 – Matrices à coefficients dans R

Capacités : traduire un problème linéaire sous forme matricielle ; mener un calcul faisant intervenir des matrices ; utiliser le rang pour décider de l'existence de solutions d'un problème linéaire.

Contenus	**Commentaires**
Matrices, matrices lignes, colonnes. Matrice nulle.	
Opérations sur les matrices : addition, multiplication par un scalaire (réel), produit, transposition.	
Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires.	
Matrices carrées : matrice unité (ou identité), matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice inversible, matrice inverse.	En pratique, la recherche de l'inverse d'une matrice peut être effectuée par la résolution d'un système linéaire.
Inversibilité d'une matrice carrée 2×2 et expression de la matrice inverse lorsqu'elle existe. Application à l'expression de la solution d'un système linéaire $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ lorsque $ad - bc \neq 0$.	On introduit la notation $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ sans aucun développement théorique. Le déterminant des matrices de taille supérieure à 2 est hors-programme.

Travaux dirigés

Étude de l'inversibilité de diverses matrices.
Détermination de l'inverse d'une matrice par diverses méthodes.

Analyse 1 – Fonctions et applications

Le but de cette rubrique est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions numériques, illustrées par le recours à des fonctions tirées d'une gamme restreinte formée de fonctions « usuelles » (affines, homographiques ou polynomiales) qui interviennent fréquemment dans les applications. On privilégie une approche graphique avec pour but de développer le sens de l'observation et de l'utilisation des courbes repréentatives.

Capacités : employer les fonctions usuelles ; reconnaitre, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles ; démontrer qu'une application est injective ou surjective ; calculer sur des polynômes ; factoriser un polynôme.

Contenus	**Commentaires**
a) Généralités	
Notion générale de fonction d'un ensemble E dans un ensemble F.	On insistera sur la nécessité d'un concept général en envisageant des exemples variés issus de différents domaines.
Application, injection, surjection, bijection, application réciproque.	On fait remarquer que, dans le cadre des fonctions de **R** dans **R**, une bijection et sa réciproque ont des graphes symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.
Composition des fonctions.	On étudie quelques exemples fournis par des fonctions de **R** dans **R** que l'on compose de diverses manières.
Image d'une partie.	La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.
b) Fonctions numériques : vocabulaire	
Somme, produit et quotient.	
Parité, imparité.	On fait le lien avec les éléments de symétrie de la courbe représentative.
Fonction périodique.	
Monotonie.	
Maximum et minimum.	
Majorant, minorant.	

Contenus (suite)	Commentaires
Comparaison de fonctions numériques.	
c) Fonctions usuelles Fonctions puissance (entières), racine carrée. Fonction sinus, cosinus et tangente. Fonctions homographiques : définition, sens de variation.	 Révision des courbes représentatives de ces fonctions. On met en valeur les courbes représentatives, parités et périodes de ces fonctions. ⇆ Ces fonctions apparaissent, entre autres, en cinétique chimique et enzymatique. La mise sous forme réduite permet de trouver rapidement le sens de variation et (par la suite) les asymptotes, mais elle n'est pas en soi un attendu du programme.
d) Fonctions polynomiales Les polynômes sont introduits à la fois comme outils de modélisation de phénomènes complexes et comme un domaine permettant un calcul de nature algébrique. Monômes. Fonctions affines. Trinôme du second degré, factorisation. Somme et produit des racines. Opérations sur les fonctions polynômes Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls. Degré, coefficients d'un polynôme. Dérivée d'un polynôme. Racine simple, racine multiple, factorisation par $(x-\alpha)$.	 On ne considère que des polynômes à des coefficients réels. Les polynômes ne peuvent être le ressort principal d'une question posée au concours. On fait apparaître les polynômes comme sommes ou combinaisons linéaires de monômes. Révision des acquis des classes antérieures : droites affines, coefficient directeur (ou pente). ⇆ Révision et mise en pratique de la régression linéaire. Révision et complément des acquis antérieurs. ⇆ Application en pH-métrie (acides forts, bases fortes). On montre que deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients. On peut ici soit s'appuyer sur les acquis des classes antérieures, soit aborder la question de la dérivée d'un polynôme et des questions qui s'y rapportent dans le chapitre Analyse 3 - dérivation. On distingue le fait que α est racine simple ou multiple de P selon que $P'(\alpha)$ est nul ou non ; une approche graphique est recommandée. L'attendu concernant les racines se limite au cas où elles sont réelles. Le test sur les dérivées successives n'est pas au programme.

Travaux dirigés

Calculs sur des polynômes.
Factorisation de polynômes simples.

Analyse 2 – Limites et continuité

Le but de ce chapitre est de mettre en place les outils fondamentaux des limites et de la continuité, aboutissant à l'émergence de certaines fonction réciproques.

Capacités : calculer une limite de fonction ; résoudre de manière approchée une équation de type $f(x)=0$; effectuer une recherche d'asymptote.

Contenus	Commentaires
a) Limites Limite d'une fonction en un point. Limite à droite, limite à gauche. Limite en $-\infty$, limite en $+\infty$.	 La définition d'une limite par (ϵ,α) doit être donnée en rapport avec le comportement graphique. On insiste sur le caractère local de la notion. On se limitera à des exemples simples.

Contenus (suite)	Commentaires
Opérations sur les limites. Limites et relation d'ordre. Théorèmes de comparaisons : théorème dit « des gendarmes » ; théorème sur la limite d'une fonction minorée par une fonction tendant vers $+\infty$ en a ; théorème sur la limite d'une fonction majorée par une fonction tendant vers $-\infty$ en a (a réel ou ∞).	
Asymptotes parallèles aux axes. Asymptotes des fonctions homographiques. ⇆ En sciences expérimentales, interprétation de la présence d'une asymptote horizontale sur le tracé d'une courbe.	La notion d'asymptote oblique est hors programme.
b) Notion de continuité Continuité en un point. Continuité à droite et à gauche. Prolongement par continuité. Opérations et composition. Continuité sur un intervalle.	
c) Fonctions continues sur un intervalle Théorème des valeurs intermédiaires.	Les résultats de ce paragraphe seront admis.
Toute fonction continue sur un segment est bornée. Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Propriétés de l'application réciproque.	
Fonctions $\sqrt[n]{\ }$.	La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$ (respectivement sur $\mathbf{R}_+$) lorsque n est impair (respectivement n est pair).
Fonction arctangente.	On présente et étudie brièvement la courbe représentative de la fonction arctan, obtenue par symétrie à partir de celle de la restriction de la tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Travaux dirigés

Comparer les positions respectives des courbes représentatives des fonctions puissances, racine, etc.
Asymptotes de courbes représentatives de fonctions homographiques.

Analyse 3 – Dérivation

Cette section s'appuie sur les notions de nombre dérivé et de fonction dérivée, introduites dans les classes précédentes. L'aspect graphique (tangentes) est à souligner. Les fonctions envisagées doivent être supposées suffisamment régulières ; on évitera toute surenchère au niveau des hypothèses.

Capacités : dériver une expression par rapport à une variable figurant dans cette expression ; étudier les variations d'une fonction de variable réelle et à valeurs réelles.

Contenus	Commentaires
a) Dérivées Nombre dérivé et opérations : linéarité, produit, quotient et fonction composée.	Seule la dérivation des fonctions composées est un apport nouveau.
Fonction dérivée et opérations : linéarité, produit, quotient et fonction composée.	Notations : f' et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. ⇆ On fait le lien avec diverses situations issues d'autres disciplines où l'on dérive par rapport au temps : vitesse d'un point mobile, vitesse de réaction, cinétique enzymatique . . .

Contenus (suite)	Commentaires
Dérivée des fonctions $\sqrt[n]{\ }$, de la fonction arctan.	On utilise la courbe représentative des fonctions puissance et tangente pour suggérer la dérivabilité des fonctions réciproques. La formule est obtenue par dérivation de la composée.
b) Théorème de Rolle et applications Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.	La démonstration n'est pas exigible. L'inégalité des accroissements finis n'est pas exigible, celle-ci pouvant être trouvée à partir du théorème du même nom.
Application à l'étude de la monotonie d'une fonction dérivable sur un intervalle.	Les liens croisés entre tableaux de variation, tableaux de signes, tableaux de valeurs et courbes représentatives sont importants et à développer.

Travaux dirigés

Études de fonctions et construction de courbes représentatives.
Recherche de droites asymptotes parallèles aux axes. Recherche d'extrémums.
Exemples de lecture graphique de propriétés d'une fonction à partir d'un tableau de variation, d'un tableau de signes, ou de sa courbe représentative.

Probabilités 1 – Ensembles et dénombrements

Cette rubrique a pour but d'introduire le vocabulaire et les méthodes de base du calcul des probabilités. Les différentes notions seront illustrées par des exemples issus des jeux, de la vie courante et des sciences. On évitera tout excès de formalisation dans les démonstrations.

Capacités : modéliser une situation combinatoire au moyen d'un vocabulaire précis ; mener un calcul de dénombrement.

Contenus	Commentaires
a) Vocabulaire de base Élément, appartenance, sous-ensembles. Inclusion, complémentaire. Intersection, réunion. Produit cartésien de n ensembles.	Ces notions, qui pourront avoir été abordées dans d'autres rubriques (par exemple lors des généralités sur les fonctions numériques), devront faire l'objet d'un développement modeste. Elles ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.
b) Dénombrement Cardinal, notation $\mathrm{card}(E)$. Note : dans les définitions qui suivent, on suppose que $\mathrm{card}(E) = n$.	On définit le cardinal grâce à la notion intuitive de nombre d'éléments.
Cardinal d'une union disjointe. Formule $\mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,B$. Cardinal d'un produit cartésien.	
Un éléments de E^p est appelée une p-liste de E. Il y a n^p p-listes de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, avec d'éventuelles répétitions.
Une p-liste est dite sans répétition lorsque ses éléments sont distincts deux à deux. Il y a $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ p-listes sans répétition de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, sans répétition.
Une liste de E contenant exactement une fois chaque élément de E est appelée une permutation de E. Il y a $n!$ permutations de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement tous les objets d'un ensemble, sans répétition.
Si $p \leq \mathrm{card}(E)$, une p-combinaison de E est une partie de E à p éléments. Il y a $\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E.	C'est le nombre de façons de choisir simultanément p objets parmi n.
Cardinal de l'ensemble des parties de E.	
Formule du binôme.	On réinterprète la formule du binôme d'un point de vue combinatoire, et on constate que les coefficients binomiaux, vus dans le chapitre Outils et calculs, sont les nombres de p-combinaisons d'ensembles finis.

Travaux dirigés

On donne des exemples nombreux et variés en insistant sur l'idée de modélisation.

Second semestre

Algèbre linéaire 3 – Espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ ($n \leq 4$)

Capacités : mener un calcul sur des vecteurs ; déterminer la somme ou l'intersection de sous-espaces vectoriels ; déterminer une famille génératrice ou une base d'un sous-espace vectoriel ; calculer un rang ou une dimension ;.

Contenus	**Commentaires**
Combinaison linéaire d'une famille finie vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs Intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$. Somme de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$. Familles finies de vecteurs de $\mathbf{R}^n$: familles génératrices d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$; dépendance, indépendance linéaire d'un nombre fini de vecteurs.	
Bases et dimension d'un sous espace vectoriel, composantes d'un vecteur dans une base, matrice colonne des composantes d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbf{R}^n$.	On admet le résultat : toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre de vecteurs.
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Le rang est relié à l'algorithme du pivot ; on admet qu'il ne dépend pas de la manière de choisir les pivots.

Algèbre linéaire 4 – Géométrie euclidienne dans $\mathbf{R}^n$ ($n \leq 3$)

Ce chapitre est inséré dans l'étude de l'algèbre linéaire à laquelle il confère un aspect visuel et appliqué ; il est aussi étudié pour son utilité en sciences physiques, chimiques, en biotechnologies et en probabilités. Le traitement des problèmes géométriques est ici réalisé en choisissant une origine permettant de se limiter au calcul vectoriel ; la vision « affine » des droites et plans ayant été abordée à l'occasion des équations linéaires et des fonctions affines.

Capacités : modéliser un problème de nature géométrique au moyen d'équations ; calculer des angles, des distances dans certaines configurations ; choisir un système de coordonnées approprié.

Contenus	**Commentaires**
a) Géométrie vectorielle du plan et de l'espace	
Produit scalaire de deux vecteurs, norme euclidienne d'un vecteur.	Le produit scalaire de deux vecteurs de coordonnées (x, y) (resp. (x, y, z)) et (x', y') (resp. (x', y', z')) est défini par $xx' + yy'$ (resp. $xx' + yy' + zz'$). Toute théorie sur le produit scalaire est hors programme.
Famille orthonormale de vecteurs, base orthonormale.	On peut faire observer que les familles orthonormales sont libres.
Coordonnées (dites cartésiennes) d'un vecteur dans une base orthonormale.	Expression du produit scalaire en fonction des coordonnées cartésiennes (résultat admis). ⇆ Projection de forces sur un système d'axes.
Projection orthogonale d'un vecteur sur une droite vectorielle, sur un plan vectoriel.	Interprétation géométrique du produit scalaire.
b) Géométrie dans le plan vectoriel orienté	

Contenus (suite)	Commentaires
Angle (orienté) entre deux vecteurs du plan.	Révision des acquis des classes précédentes. On fait le lien avec la notion d'angle polaire d'un vecteur par rapport à un repère.
Coordonnées polaires d'un vecteur du plan, une base orthonormale étant fixée.	Formules de conversion entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes. $\leftrightharpoons$ Expression de la vitesse en coordonnées polaires.
Déterminant de deux vecteurs dans le plan.	On fait le lien avec le déterminant d'une matrice carrée 2×2.
c) Géométrie dans l'espace	
Angle (non orienté) entre deux vecteurs dans l'espace.	L'angle est défini par son cosinus. $\leftrightharpoons$ Angles entre deux liaison au sein d'une molécule, angles dans une structure protéique.
Représentations paramétriques d'une droite vectorielle dans le plan ou l'espace.	On fait le lien avec le mouvement rectiligne uniforme.
Équations d'un plan vectoriel dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$. Vecteur normal.	On montre que toute équation du type $ax + by + cz = 0$ est l'équation d'un plan de vecteur normal (a, b, c) ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$).

Travaux dirigés

Exemples d'études de situations d'orthogonalité de sous-espaces vectoriels (de dimension 1 ou 2), de projections orthogonales de vecteurs sur un plan vectoriel ou une droite vectorielle.
Exemples de calculs d'angles dans le plan ou dans l'espace (comme dans un cube ou un tétraèdre régulier, que l'on rencontre dans des structures moléculaires assez communes).

Algèbre linéaire 5 – Applications linéaires de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$

Capacités : obtenir la matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques ; déterminer un noyau ou une image d'une application linéaire.

Contenus	Commentaires
Applications linéaires	
Opérations : addition, multiplication par un scalaire (réel), composition.	On fait le lien avec les notions d'injection, de surjection et de bijection.
Noyau, ensemble image, rang d'une application linéaire.	
Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs de la base canonique.	L'application linéaire associée à une matrice est utilisée sans justification théorique.
Matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques.	
Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire (réel) d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application linéaire réciproque.	

Analyse 4 – Suites réelles

Capacités : obtenir une expression pour le terme d'ordre n d'une suite arithmétique, géométrique ; démontrer ou réfuter une convergence de suite ; comparer deux suites asymptotiquement.

Contenus	Commentaires
a) Généralités	
Définition. Somme, produit et quotient. Suites majorées, suites minorées.	Les propriétés des suites seront à relier à celles vues pour les fonctions.
Monotonie.	On se sert de la caractérisation propre aux suites.
Suite définie par récurrence.	Représentation graphique des termes d'une suite définie par récurrence. Aucune méthodologie d'étude particulière n'est exigible.
b) Suites usuelles	

Contenus (suite)	Commentaires
Suites arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes de telles suites.	La connaissance des suites arithmético-géométriques n'est pas un attendu du programme (on se contente de les inclure dans les exemples d'études de suites récurrentes).
c) Limites Suite convergente, suite divergente vers $-\infty$ et $+\infty$. Suite divergente. Opérations sur les limites. Limites et relation d'ordre. Théorèmes de comparaison. Théorème de la limite monotone : existence d'une limite finie ou infinie pour les suites monotones. Théorème des suites adjacentes.	 Les propriétés des suites seront à relier à celles vues pour les fonctions.
d) Suites équivalentes Suites équivalentes, notation $u_n \sim v_n$. L'équivalence est compatible avec la multiplication. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	 Le développement sur les équivalents doit être modeste et se limiter aux suites dont le terme général ne s'annule pas.

Travaux dirigés

Exemples d'études de suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, la fonction f étant monotone sur l'intervalle d'étude choisi.
Exemples de méthodes numériques de résolution d'équations.
Exemples de recherches d'équivalents.
⥲ Exemples de phénomènes d'évolution représentables par un modèle discret : croissance bactérienne, dynamique des populations.

Analyse 5 – Calcul intégral

Capacités : calculer une primitive simple ; calculer une intégrale au moyen d'une primitive ; encadrer une intégrale.

Contenus	Commentaires
a) Primitives Définition. Existence d'une primitive sur un intervalle pour une fonction continue. Caractérisation des primitives sur un intervalle pour une fonction continue. Calcul des primitives.	 Résultat admis. Linéarité, composition, primitives de $u'e^u$ et de $u'u^\alpha$ où α est un réel.
b) Intégrale Définition de l'intégrale de a à b d'une fonction f continue sur un intervalle I contenant a et b : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I. L'intégrale d'une fonction positive est l'aire sous sa courbe représentative. Extension de cette interprétation au cas d'une fonction de signe non constant. Propriétés élémentaires : relation de Chasles, linéarité, positivité, intégrale et relation d'ordre, majoration de la valeur absolue d'une intégrale. Si f est continue sur un intervalle I et si a est un élément de I alors la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. Valeur moyenne d'une fonction.	 On se limite à des fonctions continues sur un intervalle s'annulant en un nombre fini de points.
c) Procédés d'intégration	

Contenus (suite)	Commentaires
Intégration par parties.	Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'une intégration par parties sera indiquée.
Intégration par changement de variable.	Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, le changement de variable sera donné.
d) Fonctions logarithme népérien et exponentielle	
Définition et étude de la fonction logarithme népérien, propriétés algébriques. Définition du logarithme décimal, conversion.	Révision et complément des acquis antérieurs. ⇋ Usage des logarithmes décimaux en pH-métrie. ⇋ Conversion de lois physiques ou chimiques, s'exprimant de manière multiplicative, en relations additives : migration de molécules en situation d'électrophorèse, évolution microbienne, loi d'action de masse, etc.
Étude de la fonction exponentielle.	
Définition de a^b, où a est un réel strictement positif et b un réel.	
Étude des fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbf{R}$.	On étudie l'allure de la courbe représentative selon la position de λ par rapport à 0. ⇋ Exemples de modèles exponentiels issus des autres disciplines (la variable x est alors pourvu d'une unité de mesure et la constante λ a aussi une unité).
Théorème des puissances (ou croissances) comparées.	Il s'agit de comparer le comportement en 0 et en $\pm\infty$ des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Travaux dirigés

Études de fonctions dont la définition dépend des fonctions exponentielle, logarithme.
Résolution d'équations faisant intervenir exponentielle, logarithme ou des puissances.
Exemples de méthodes numériques de calcul d'intégrales (méthode des rectangles).
⇋ Étude de différents modèles d'évolution issus des autres disciplines faisant intervenir une fonction de la variable réelle : modèles linéaires, logarithmiques, exponentiels, homographiques.

Analyse 6 – Équations différentielles

Capacités : modéliser une situation concrète par un problème différentiel ; exploiter la linéarité d'un problème différentiel.

Contenus	Commentaires
a) Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants	
Équations du type : $y' + ay = 0$ où a est un nombre réel.	
Équations du type : $y' + ay = f(t)$ où a est un réel et f est une fonction continue sur un intervalle.	Pour ce type d'équations, on donnera la forme d'une solution particulière dont l'étudiant aura à ajuster les coefficients.
b) Équations différentielles linéaires du second ordre	
Équations du type : $y'' + ay' + by = 0$ où a et b sont des nombres réels.	
Résolution de $y'' + ay' + by = f(t)$ où a et b sont réels et f une fonction continue sur un intervalle, quand la forme d'une solution particulière est donnée.	Le cas le plus fréquent dans les applications est un second membre de la forme $t \mapsto \sin(\omega t)$; on fournira à l'étudiant la forme d'une solution possible, du type $t \mapsto \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \lambda t \cos(\omega t)$, il restera à déterminer la valeur de λ et de μ.
Principe de superposition.	Il s'agit de mettre en évidence la linéarité des « sorties » (la fonction y) par rapport aux « entrées » (la fonction f).

Travaux dirigés

⥃ Exemples issus de modèles relevant des sciences physiques, de la chimie et de la biologie : mouvement d'un point mobile, modèles d'évolution bactériennes, cinétique chimique.

Probabilités 2 – Concepts de base des probabilités

Capacités : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une probabilité ; calculer la probabilité d'un évènement ; élaborer une hypothèse d'indépendance et l'utiliser pour calculer des probabilités.

Contenus	Commentaires
a) Vocabulaire Épreuve (expérience aléatoire). Univers. Notion d'événement. Évènement certain, impossible. Évènement élémentaire. Événements incompatibles, complémentaires. Système complet événements.	En première année on se limitera au cas où l'univers est fini et où l'algèbre des événements est égale à l'ensemble des parties de l'univers.
b) Probabilité Définition. Espace probabilisé. Propriétés. Dans le cas d'un univers fini, caractérisation d'une probabilité par la donnée des probabilités des événements élémentaires. Cas de l'équiprobabilité (cas favorables, cas possibles)	
c) Probabilités conditionnelles Définition. Notations : $P(A/B)$ et $P_B(A)$. Propriétés. Théorème des probabilités composées. Théorème des probabilités totales : $$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(B/A_i)$$ Théorème de Bayes. Indépendance de deux événements. Événements mutuellement indépendants. Probabilité sur un univers produit.	On fera observer que P_B correspond à une probabilité sur un autre espace mais aucune théorie n'est à construire. On admettra l'existence ainsi que les propriétés d'une telle probabilité.

Travaux dirigés

On envisagera de nombreux exemples en insistant sur la modélisation choisie.
⥃ On peut en particulier s'appuyer sur des exemples issus de la génétique : code génétique et probabilités d'apparitions d'un triplet de codons donné, transmission d'allèle pour un gène, génétique des populations, etc.

Probabilités 3 – Variables aléatoires discrètes

Capacités : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une variable aléatoire ; démontrer que des variables aléatoires sont indépendantes ; calculer une espérance ; calculer une variance.

Contenus	Commentaires
Définition	On se limitera au cas où l'ensemble des valeurs prises est fini.
Loi de probabilité d'une variable discrète.	Diagramme en bâtons.
Fonction de répartition.	Représentation graphique. On fera le lien avec les statistiques descriptives.
Espérance mathématique.	
Variance et écart-type.	On met en valeur la propriété d'invariance $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Contenus (suite)	**Commentaires**
Formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.	Pour le calcul de $E(X^2)$, on admet en première année la formule découlant du théorème de transfert (le théorème de transfert est étudié en seconde année).

Travaux dirigés

Exemples de lois de probabilité de variables aléatoires discrètes ; l'étude approfondie des lois usuelles sera faite en deuxième année.