Classe préparatoire TPC première année
Projet de programme de mathématiques

Table des matières

Objectifs de formation

Le programme de mathématiques de TPC s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.
Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :

– assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des nouveaux programmes du cycle terminal, dont il consolide et élargit les acquis en prenant appui sur divers chapitres des classes de Terminales STI2D et STL : notations et raisonnement mathématiques, nombres complexes, géométrie dans le plan et dans l'espace, fonctions usuelles, équations différentielles ;
– consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul, qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
– présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Compétences développées

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.
Dans ce cadre, la formation mathématique vise le développement des compétences générales suivantes :

– **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
– **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
– **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
– **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
– **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
– **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles.
De façon générale, par son langage et ses modes de représentation, la géométrie imprègne l'ensemble du programme ; le recours régulier à des figures ou à des croquis est nécessaire, afin de développer une vision géométrique des objets abstraits et de permettre de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques, chimiques ou industriels (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques…).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :
– prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;
– connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
– prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Il a été conçu pour s'adapter aux intentions de la réforme de la série STL. Les étudiants de cette série ont désormais pour vocation d'entrer dans un cycle long de formation supérieure : le programme de mathématiques se doit d'être d'une ambition réaliste.
Les grands équilibres du programme n'ont pas été modifiés. C'est ainsi que les deux grands axes « Analyse et géométrie » et « Algèbre et géométrie » demeurent présents. S'y ajoute une introduction limitée d'un enseignement de probabilités visant à consolider les notions figurant dans le programme de Terminale STL et à préparer celles qui seront ultérieurement introduites dans les grandes écoles. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines, et d'enrichir les thèmes susceptibles d'être abordés lors du TIPE.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire ou les fonctions de variable réelle en En introduction à l'algèbre linéaire, le chapitre sur les systèmes linéaires permet de rappeler les propriétés élémentaires relatives aux droites du plan, aux droites et plans de l'espace, donnant du sens au volet affine de l'algèbre linéaire et s'appuyant sur les acquis du lycée.

Le choix a été fait d'introduire assez tôt dans l'année un module substantiel visant à consolider ou à introduire des pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles) avant d'introduire les théories sous-jacentes, afin d'en faciliter l'assimilation.

Ces aménagements devraient permettre de constituer un programme cohérent autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants. Cela doit être notamment la règle lors des séances de travaux dirigés et de travaux pratiques d'informatique.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres du programme **ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression** : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement **en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques**.

Les liens avec les autres disciplines scientifiques sont identifiés avec le symbole ⇆ PC pour les liens avec la physique et la chimie, ⇆ I pour les liens avec l'informatique.

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :
– pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes de résolution favorise cette mise en activité ;

– didacticien, il choisit la mise en contexte favorable des connaissances et des capacités : la problématique traitée, si elle s'y prête, peut être mise en perspective avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, des questions d'actualité, des situations réelles ou des débats d'idées. L'enseignant met ainsi son enseignement « en culture » si cela rend sa démarche motivante pour les élèves.

PROGRAMME

Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement

Cette partie regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'un raisonnement mathématique. Ces notions sont introduites de manière progressive et trouvent naturellement leur place dans les autres chapitres en vue d'être acquises en fin de premier semestre. Dans tous les cas, cette partie ne doit pas se traduire par un cours de logique, au sens classique du terme. Plusieurs groupes classiques étant rencontrés dans le cadre du programme, la terminologie associée peut être utilisée mais aucune connaissance théorique n'est exigible

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	Passer du langage naturel au langage formalisé en utilisant les quantificateurs. Formuler une négation. Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.
Connecteurs logiques : disjonction (ou), conjonction (et), implication, équivalence.	Passer du langage naturel au langage formalisé en utilisant des connecteurs. Formuler une négation.
b) Ensembles	
Cette partie trouvera, entre autres, des applications dans le chapitre sur le dénombrement. On se limite à une approche naïve. Aucun développement n'est fait sur la théorie des ensembles.	
Appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie) de E. Ensemble vide.	Démontrer une égalité, une inclusion de deux ensembles.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.	Maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Notations $\complement_E A$, $\overline{A}$, $E \setminus A$. $\leftrightarrows$ I
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles. Ensemble des parties d'un ensemble.	Un élément de E^p sera appelé p-liste ou p-uplet d'éléments de E.
c) Propriétés de $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence	
L'objectif principal de cette partie est la maîtrise du principe de récurrence.	
Propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$.	Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ sont supposées connues. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
Définition du plus grand élément, du plus petit élément. Toute partie non vide a un plus petit élément. Application au principe de récurrence.	Mener un raisonnement par récurrence simple ou avec prédécesseurs. $\leftrightarrows$ I
Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.	
d) Autres méthodes de raisonnement	
Raisonnement par contraposition. Raisonnement par l'absurde.	Écrire la contraposée d'une assertion. Mener un raisonnement par l'absurde.

Contenus	Capacités & Commentaires
Principe d'analyse/synthèse.	Distinguer condition nécessaire et condition suffisante. L'objectif est de donner une méthode de résolution détaillée pour les exemples du programme nécessitant ce type de raisonnement. On se limite à des exemples simples, aucune technicité excessive n'est attendue. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.

e) Applications

Les notions ci-dessous, doivent être acquises progressivement au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie.

Application (ou fonction) d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F ; graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Toute formalisation est hors programme.
Restrictions.	Notation : $f_{\mid I}$.
Image directe, image réciproque.	On évitera tout développement technique sur la notion d'image réciproque, introduite principalement en vue des probabilités.
Composition.	Reconnaître une fonction composée.
Injection, surjection, bijections, réciproque d'une bijection.	Résoudre des équations.
Application identité.	

Premier semestre

Pratique de calcul

Prenant appui sur les acquis de la classe de Terminale, ce chapitre a pour but de mettre en œuvre des techniques de calcul indispensables en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques. Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Le professeur organise ce chapitre de la façon qui lui semble la plus appropriée, en tenant compte des acquis des étudiants et des besoins des autres disciplines. Il est nécessaire d'insister sur ces notions tôt dans l'année afin de faciliter le reste de l'apprentissage.
Les objectifs de formation sont les suivants :

- *Une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;*
- *L'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;*
- *La manipulation des fonctions usuelles.*
- *Le calcul de limites, de dérivées et de primitives ;*
- *L'utilisation de notations et des techniques fondamentales de calcul algébrique.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Inégalités larges, inégalités strictes, intervalles de $\mathbb{R}$.	
Compatibilité avec les opérations.	Dresser un tableau de signes ; Résoudre des inéquations ; Interpréter graphiquement une inéquation du type $f(x) \leqslant \lambda$.
Valeur absolue, inégalité triangulaire.	Interpréter sur la droite réelle des inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Majoration, minoration et encadrement de sommes, de produits et de quotients.	
b) Équations, inéquations polynomiales et trigonométriques :	
Équation du second degré. Factorisation d'un polynôme dont une racine est connue.	Déterminer le signe d'un trinôme. Factoriser un polynôme de degré inférieur à 3 dont une racine est connue.
Cercle trigonométrique, valeurs usuelles, formules exigibles : $\cos(a+b), \sin(a+b), \cos(2x), \sin(2x)$	Utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des équations et inéquations trigonométriques. Exprimer $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$.
	Déterminer l'ensemble de définition de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.
c) Calcul de limites en un point ou à l'infini	
Aucune étude théorique de la limite n'est abordée à ce stade. On s'appuiera sur les connaissances des limites acquises au lycée.	
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'un inverse.	
Exemples de formes indéterminées : $\infty-\infty \quad 0\times\infty \quad 1^{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$	Lever, sur des exemples simples, certaines formes indéterminées à l'aide de limites de taux d'accroissement : limites quand x tend vers zéro de $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{\exp(x)-1}{x}$, $\frac{\cos(x)-1}{x^2}$. On s'appuie sur l'étude de la dérivée faite dans la série STL.
Croissances comparées.	Calculer une limite par encadrement ou par comparaison.
Limite d'une fonction composée.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Calcul de dérivées et de primitives	
Dérivées des fonctions usuelles : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, exp, ln, cos, sin.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées dans des cas simples. Aucune étude théorique de la dérivation n'est abordée à ce stade.
Opération : somme, produit, quotient.	Appliquer la formule $(v \circ u)' = u'.(v' \circ u)$ pour dériver une fonction composée.
Dérivation de $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ avec φ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	
Primitive sur un intervalle.	Reconnaître les expressions du type $\dfrac{u'}{u}$, $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u'}{u^n}$, $u'.(v' \circ u)$ où v est une fonction dérivable afin d'en calculer les primitives.
e) Sommes et produits	
Notations et règles de calcul.	Effectuer un changement d'indices. Reconnaître des sommes et produits télescopiques. L'objectif est d'obtenir une aisance dans la manipulation des symboles $\sum$ et Π pour des exemples raisonnables.
Séparation d'une somme en fonction de la parité des indices.	
Factorielle, coefficients binomiaux.	Notations $n!$, $\dbinom{n}{k}$. Aucun lien avec le dénombrement n'est attendu à ce stade.
Formule de Pascal. Formule du binôme de Newton. Factorisation de $a^3 - b^3$. Exemple de calcul de sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k.$	

Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les acquis du cycle terminal. Le programme combine plusieurs aspects :
– *Équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe).*
– *Interprétation géométrique des nombres complexes,.*
– *Exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.*
Il est recommandé d'illustrer le cours de nombreuses figures et de relier ce chapitre aux besoins des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
(a) L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes	
La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.	
Parties réelle et imaginaire, forme algébrique. Opérations sur les nombres complexes. Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations.	Notations $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$. Interpréter géométriquement le conjugué d'un nombre complexe. Notation $\overline{z}$.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, affixe d'un point, d'un vecteur ; image d'un nombre complexe. Module d'un nombre complexe. Module d'un produit et d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormal direct. Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe. Interpréter géométriquement $\|z-a\|$ avec a, $z \in \mathbb{C}$.
b) Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1	
Définition de $\mathrm{e}^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, formules d'Euler. Description des éléments de $\mathbb{U}$. Relation $\mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i(a+b)}$. Formule de Moivre.	Linéariser et factoriser des expressions trigonométriques. Retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour de petites valeurs de n. Il s'agit de consolider une pratique du calcul, en évitant tout excès de technicité.
c) Arguments d'un nombre complexe non nul	
Arguments d'un nombre complexe non nul.	Écrire un nombre complexe non nul sous la forme $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme trigonométrique). Interpréter géométriquement un argument d'un nombre complexe, coordonnées polaires. $\leftrightarrows$ PC Amplitude et phase.
Arguments d'un produit, d'un quotient.	
d) Exponentielle complexe	
Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy}$ où $z = x + iy$ et x, $y \in \mathbb{R}$. Relation $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$.	Résoudre une équation du type $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$. Notations $\exp(z)$, e^z.
(e) Racines n-ième	
Description des racines n-ième d'un nombre complexe. Racines de l'unité : définition, description, propriétés.	Résoudre l'équation $z^n = \lambda$. Représenter géométriquement les racines de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$.
f) Équation du second degré dans $\mathbb{C}$	
Racines carrées.	Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique et trigonométrique.

Contenus	Capacités & Commentaires
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$.	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Prenant appui sur les acquis de la classe de Terminale, ce chapitre a pour but d'introduire les outils nécessaires à l'étude de fonctions. Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Les définitions précises et les constructions occuperont une grande part du programme d'analyse du second semestre. Ce chapitre est naturellement relié aux disciplines scientifiques et technologiques.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$	
	Représenter graphiquement une fonction à valeurs réelles.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	Interpréter géométriquement ces propriétés.
Somme, produit, composée.	
Monotonie.	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Interpréter géométriquement ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f \rvert$ est majorée.
Extremum, extremum local.	
b) Dérivation	
Équation de la tangente en un point.	Interpréter géométriquement la dérivée d'une fonction en un point.
Application à l'étude des variations d'une fonction.	Dresser le tableau de variation d'une fonction. À ce stade, un tableau de variation clairement présenté, accompagné de la détermination du signe de la dérivée et des valeurs ou limites aux bornes, vaut justification de bijectivité.
Dérivée d'une fonction réciproque.	Tracer le graphe d'une fonction réciproque. La dérivée de la réciproque de f est obtenue géométriquement à l'aide la symétrie des tangentes. La formule sera démontrée ultérieurement.
c) Étude d'une fonction	
Plan d'étude d'une fonction.	Déterminer les symétries et les périodicités afin de réduire l'ensemble d'étude d'une fonction ; Déterminer les variations et les limites d'une fonction ; Déterminer les extremums éventuels d'une fonction ; Tracer le graphe d'une fonction ; Obtenir des inégalités grâce à une étude de fonction. Les asymptotes ainsi que la position des tangentes par rapport à la courbe seront traitées ultérieurement comme des applications des développements limités.
d) Fonctions usuelles	
Valeur absolue.	Représenter graphiquement la fonction.
Partie entière.	Représenter graphiquement la fonction. Notation $\lfloor x \rfloor$. L'existence est admise.

Contenus	Capacités & Commentaires
Étude des fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances, circulaires directes et réciproques.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
Fonctions circulaires directes et réciproques : rappels sur les fonctions cos et sin, définition et étude des fonctions tan, arcsin, arccos, arctan.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions.
Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, puissances et exponentielle.	Comparer des fonctions au voisinage de l'infini. Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

Géométrie élémentaire du plan

À l'issue de la Terminale, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien en tant qu'ensemble de points ; la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient d'observer que tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires. Dans le plan, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles. La donnée d'un repère orthonormal identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. La géométrie joue un rôle essentiel en mathématiques et dans les disciplines scientifiques et technologiques ; elle est au c œur des compétences de modélisation et de représentation. Ce chapitre doit être traité en liaison avec les autres disciplines ; pour la physique et la chimie, on pourra se reporter à l'annexe Outils mathématiques pour la physique et la chimie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans le plan	
Repère orthonormé (ou orthonormal) ; Coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée ; Passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes. On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$ et $\vec{u}.\vec{v} = 0$ sinon.	Interpréter le produit scalaire en termes de projection orthogonale.
Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale ; Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs ; Déterminer une mesure d'un angle non orienté. Démonstrations non exigibles.
c) Déterminant dans une base orthonomale directe	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$[\vec{u},\vec{v}] = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$$ et $[\vec{u},\vec{v}] = 0$ sinon. Bilinéarité, antisymétrie.	Interpréter un déterminant en termes d'aire orientée d'un parallélogramme ; Caractériser la colinéarité de deux vecteurs. La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe. Calculer le déterminant dans une base orthonormale directe. Démonstrations non exigibles.
d) Droites	
Définition, vecteur directeur, vecteur normal.	
Équation cartésienne et système d'équations paramétriques.	Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et inversement ; Déterminer l'intersection de deux droites ; Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite ; Calculer la distance d'un point à une droite.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Cercles	
Définition, équation cartésienne. Représentation paramétrique.	Reconnaître une équation cartésienne de cercle Déterminer une équation d'un cercle à partir de son centre et son rayon. Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir d'une équation. Déterminer une équation d'un cercle connaissant les extrémités d'un diamètre.

Géométrie élémentaire de l'espace

Dans ce chapitre, on adapte à l'espace les notions étudiées dans le chapitre de géométrie plane. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur le chapitre de géométrie plane et sur l'intuition géométrique développée dans les autres disciplines. Des notions telles que le repérage dans l'espace et le produit vectoriel doivent être abordées en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans l'espace	
Repère orthonormé de l'espace, coordonnées cartésiennes.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique. Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale directe. Démonstrations hors programme.
c) Produit vectoriel dans l'espace orienté	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur de norme $\|\|\vec{u}\|\|\,\|\|\vec{v}\|\|\,\|\sin(\vec{u},\vec{v})\|$ directement orthogonal à $(\vec{u},\vec{v})$; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul. Bilinéarité, antisymétrie.	Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires. La notion d'orientation de l'espace reposant sur les conventions physiques usuelles est admise. Exprimer le produit vectoriel dans une base orthonormale directe ; Démonstrations hors programme.
d) Produit mixte dans l'espace orienté	
Définition du produit mixte de trois vecteurs $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$. Trilinéarité, antisymétrie.	Déterminer si trois vecteurs sont coplanaires. Interpréter $\left\|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right\|$ comme volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Notation $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$. Exprimer le produit mixte dans une base orthonormale directe. Démonstrations hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Plans et droites	
Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, par un point et un vecteur normal, par trois points non alignés. Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans.	Déterminer une équation cartésienne ou un système d'équations paramétriques d'un plan ; Passer d'une représentation à l'autre. Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans ; Déterminer un système d'équations cartésiennes ou un système d'équations paramétriques d'une droite ; Passer d'une représentation à l'autre. Étudier des intersections.
Distance d'un point à un plan, distance d'un point à une droite.	Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.
f) Sphères	
Définition, équation cartésienne en repère orthonormé.	Reconnaître une équation de sphère ; Déterminer une équation d'une sphère à partir de son centre et de son rayon ; Déterminer le centre et le rayon d'une sphère à partir d'une équation ; Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Équations différentielles linéaires

En classe de Terminale, les étudiants ont étudié des exemples simples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, du premier et du second ordre. Il s'agit dans ce chapitre de consolider et d'étendre cette étude. Les équations différentielles sont un domaine à la fois très riche pour les mathématiques, pour la physique et la chimie. Ce chapitre doit être traité en concertation avec les professeurs des autres disciplines afin de l'illustrer par des exemples issus des domaines scientifiques et technologiques. On se référera à l'annexe Outils mathématiques pour la physique et la chimie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Écrire et résoudre l'équation homogène associée. Utiliser le principe de superposition et/ou la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière. Déterminer la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Décrire l'ensemble des solutions. Les étudiants doivent savoir étudier des équations dans lesquelles la variable et la fonction inconnue sont représentés par d'autres lettres que x et y. À ce stade, la résolution ne doit pas faire appel à une intégration par parties ou à un changement de variable.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée. ⇆ PC : circuits électriques RC, RL

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des nombres réels et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Donner l'équation caractéristique. Résoudre l'équation homogène, notamment dans le cas d'une équation de la forme $y'' \pm \omega^2 y(x) = 0$. ⇆ PC : circuits électriques LC, RLC. Régime transitoire, régime stationnaire. Pôles d'un système. ⇆ *Outils mathématiques pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur* §2. Déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $Ae^{\omega x}$ avec $(A, \omega) \in \mathbb{C}^2$. Utiliser le principe de superposition. Exprimer la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée. La démonstration est hors programme.

Dénombrement

Ce chapitre a pour but de présenter les bases du dénombrement, notamment en vue de l'étude des probabilités.
Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :
- *on adopte un point de vue intuitif pour la définition d'un ensemble fini et la notion de cardinal ;*
- *parmi les propriétés du paragraphe (a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Ce chapitre est également l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui du chapitre « Pratique du calcul. »

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Un ensemble est de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ s'il est en bijection avec $[\![1, n]\!]$. L'ensemble vide est de cardinal nul.	Notations $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$.
Opérations sur les ensembles et les cardinaux : union disjointe, union quelconque, complémentaire et produit cartésien.	La formule d'union disjointe peut être admise. La formule du crible est hors programme.
Si B est une partie de l'ensemble fini A alors B est finie et $\mathrm{Card}(B) \leqslant \mathrm{Card}(A)$; il y a égalité si et seulement si $A = B$.	Démontrer l'égalité de deux ensembles finis. Si A et B sont deux ensembles finis de même cardinal et f une application de A dans B alors f est injective si et seulement si f est surjective, si et seulement si f est bijective.
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Dénombrement	
Nombre de p-uplets (ou p-listes) d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.	Reconnaître des situations de dénombrement relevant de ce cadre. On n'utilise pas la notation A_n^p.
Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.	Reconnaître des situations de dénombrement relevant de ce cadre Notation $\binom{n}{p}$. Donner une interprétation combinatoire des propriétés suivantes : $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$; $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n$; $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$.

Systèmes linéaires et calcul matriciel

Ce chapitre est à concevoir comme une initiation aux structures algébriques et plus particulièrement à l'algèbre linéaire « abstraite » qui sera étudiée au second semestre.

La problématique de départ est la résolution des systèmes linéaires. Elle est à la fois familière des étudiants – ils l'ont rencontrée et pratiquée dans l'enseignement secondaire pour de petites dimensions, par exemple en géométrie – et motivante par le nombre important de problèmes se ramenant à la résolution d'un système linéaire (méthode des différences finies, méthode des moindres carrés, etc). L'objectif majeur du sous-chapitre « **A - Systèmes linéaires** *» est la justification et la mise en œuvre de l'algorithme de Gauss-Jordan de résolution d'un système linéaire.*

La recherche d'une méthode systématique de résolution d'un système linéaire par cet algorithme conduit naturellement au calcul matriciel qui recèle à la fois des propriétés inhabituelles pour les étudiants (existence de diviseurs de 0*, non commutativité) et des propiétés analogues à celles des ensembles de nombres (distributivité, etc.) qu'il convient de mettre en évidence.*

L'ordre d'exposition choisi ci-dessous n'est nullement impératif. On pourra aussi bien commencer par introduire le calcul matriciel, puis l'appliquer à la théorie des systèmes linéaires. On veillera à respecter les objectifs de formation suivants :
- *Familiariser les étudiants avec les différentes représentations des solutions d'un système linéaire.*
- *Entraîner au calcul matriciel. On évitera cependant tout excès de technicité et on se limitera à des systèmes et des matrices de taille raisonnable dans les applications numériques.*
- *Consolider la formation à l'algorithmique et la programmation.*
- *Mettre en évidence sur des exemples l'instabilité de la méthode de Gauss-Jordan due aux erreurs d'arrondi.*

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

A - Systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$	
Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, définition d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes comme tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.	
b) Systèmes linéaires	
Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire à n équations et p inconnues. Système homogène.	Interprétations géométriques dans le plan et dans l'espace. Système homogène associé à un système linéaire.
Matrice A d'un système linéaire ; matrice augmentée $(A\|B)$ où B est la colonne des seconds membres.	
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice : échange des lignes L_i et L_j, multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$, ajout de $\lambda \cdot L_j$ à L_i pour $i \neq j$.	Interpréter les opérations sur les lignes en termes de système linéaire. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$; $L_i \leftarrow \lambda L_i$; $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Deux systèmes sont dits équivalents si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	Maîtriser la notion de système équivalent.
Deux matrices sont dites équivalentes en lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	Relier cette notion à la théorie des systèmes linéaires. Notation $A \underset{L}{\sim} A'$.
Si on passe d'un système $\mathscr{S}$ à un autre système $\mathscr{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\mathscr{S}'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\mathscr{S}$.	Ce résultat justifie la présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire.

c) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Une matrice est dite échelonnée en lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes : – Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ; – À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.	Reconnaître et exploiter des matrices échelonnées dans le cadre de l'étude de systèmes linéaires. Un schéma « en escalier » illustre la notion de matrice échelonnée. On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.
Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite en lignes lorsque tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.	
Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une unique matrice échelonnée réduite en lignes.	Déterminer la matrice échelonnée réduite en lignes associée à un système donné. Description de l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan. La démonstration de l'unicité n'est pas exigible.

d) Ensemble des solutions d'un système linéaire

Structure de l'ensemble des solutions.	Résoudre un système compatible. L'ensemble des solutions d'un système $\mathscr{S}$ est soit vide, soit de la forme $X_0 + S_H$ où X_0 est une solution particulière de $\mathscr{S}$ et S_H l'ensemble des solutions du système homogène associé à $\mathscr{S}$.
Rang d'un système linéaire.	Défini comme égal au nombre de pivots.
Inconnues principales et inconnues secondaires (paramètres).	Le nombre de paramètre est égal à la différence du nombre d'inconnues et du rang.
Système incompatible. Système compatible.	Déterminer des conditions de compatibilité pour un système donné Application aux problèmes d'intersection en géométrie du plan et de l'espace.

B - Calcul matriciel

Dans tout ce sous-chapitre, n et p appartiennent à $\mathbb{N}^*$. On définit les opérations matricielles qui permettent de représenter matriciellement les opérations de pivot explicitées précédemment. L'objectif visé est la décomposition de toute matrice rectangulaire A en un produit de la forme $A = ER$ où R est échelonnée réduite en lignes et E est un produit de matrices élémentaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces de matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	
Opérations sur les matrices : addition, multiplication d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$ et produit de deux matrices.	Les propriétés suivantes sont exigibles : la $j-ème$ colonne de AB est le produit de A par la $j-ème$ colonne de B et la $i-ème$ ligne de AB est le produit de la $i-ème$ ligne de A par B.
Application à l'écriture matricielle d'un système linéaire. Propriétés des opérations matricielles. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme. Matrices carrées inversibles. Inverse.	Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul. Notation I_n pour la matrice identité. Le produit matriciel n'est pas commutatif.
Inverse du produit de matrices inversibles.	On appelle groupe linéaire, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de taille n. Tout développement sur la notion de groupe est hors programme.
b) Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel	
Matrices élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Inversibilité des matrices élémentaires.	Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $A = ER$.
Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.	Notation $A \underset{C}{\sim} A'$.
Calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et méthode du pivot de Gauss.	Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, équivalence des propriétés suivantes : – A est inversible ; – Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle ; – $A \underset{L}{\sim} I_n$; – Pour tout B, le système $AX = B$ admet une unique solution ; – Pour tout B, le système $AX = B$ admet au moins une solution. ⇆ I.
c) Matrices carrées remarquables	
Matrices diagonales. Matrices triangulaires.	Stabilité par les opérations.
d) Transposition	
Transposée d'une matrice Transposée d'une somme, d'un produit, d'un inverse.	Notation A^{T}. Matrices symétriques et antisymétriques.

Polynômes

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On pourra confondre polynômes et fonctions polynomiales.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes d'indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{K}$.	Aucune connaissance de la construction de $\mathbb{K}[X]$ n'est exigible. Notation d'un polynôme : $\sum\limits_{p=0}^{n} a_p X^p$ ou $a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$.
Opérations : somme, produit et composée.	
Degré d'un polynôme. Coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'une somme et d'un produit.	Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$.
Fonction polynomiale associée à un polynôme.	
b) Bases de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
On introduira ces notions par des rappels sur l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.	
Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.	Effectuer une division euclidienne de polynômes. $\leftrightarrows$ I
c) Dérivation	
Polynôme dérivé.	
Opérations : somme produit.	
Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Leibniz.	
Formule de Taylor.	
d) Racines	
Racine d'un polynôme.	Déterminer les racines d'un polynôme. Caractériser les racines par la divisibilité.
Multiplicité d'une racine.	
Caractérisation par les valeurs des dérivées successives en a de l'ordre de multiplicité de la racine a.	
Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul par son degré.	
Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.	
Théorème de d'Alembert-Gauss.	La démonstration de ce théorème est admise.
f) Somme et produit des racines d'un polynôme	
Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.	Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.
Cas des polynômes de degré deux.	

Deuxième semestre

Nombres réels et suites numériques

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique. Les notions de borne supérieure et de borne inférieure sont introduites uniquement pour aboutir au théorème de la limite monotone.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres réels	
Ensembles usuels de nombres : entiers relatifs, nombres décimaux, rationnels.	La construction de ces ensembles de nombres n'est pas au programme.
Droite réelle, droite réelle achevée.	Faire le lien avec la géométrie. La construction de $\mathbb{R}$ n'est pas au programme.
Distance entre deux réels.	
La relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: majorant, maximum, minorant, minimum.	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.	Déterminer les bornes supérieure et inférieure éventuelles de fonctions. L'existence est admise. Aucun développement n'est attendu.
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$: une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tout $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, $[a,b] \subset I$.	
b) Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	Reconnaître une suite définie de façon explicite, implicite ou par récurrence. Reconnaître une suite extraite.
Opérations.	
Monotonie, stricte monotonie.	
Suites minorées, majorées, bornées.	Manipuler sur des exemples des majorations et minorations Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(\lvert u_n \rvert)$ est majorée.
Suites arithmétiques et suites géométriques.	
c) Limite d'une suite réelle	
Si ℓ est un réel, la suite (u_n) admet ℓ pour limite si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \lvert u_n - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$.	Prouver l'existence d'une limite ℓ en majorant $\lvert u_n - \ell \rvert$, notamment lorsque la suite vérifie une inégalité du type : $\lvert u_{n+1} - \ell \rvert \leq k \lvert u_n - \ell \rvert$. Lien avec la définition vue en classe de Terminale.
La suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite si : $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$.	Adapter cette notion à la limite en $-\infty$.
Unicité de la limite.	
Suite convergente, suite divergente.	
Toute suite réelle convergente est bornée.	
Si (u_n) tend vers un élément de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors il en est de même de toute suite extraite de (u_n).	Prouver la divergence d'une suite à l'aide d'une suite extraite.
Opérations sur les limites de suites : somme, multiplication par un scalaire, produit, inverse.	Lever une indétermination.
Cas des suites géométriques, arithmétiques.	
Passage à la limite dans une inégalité.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Théorèmes d'existence d'une limite	
Théorème de convergence par encadrement. Théorème de la limite monotone.	Exploiter ce théorème sur des exemples.
e) Comparaisons de suites	
Divergence par comparaison : si (u_n) tend vers $+\infty$ et si, pour tout n, on a $u_n \leqslant v_n$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.	Adapter cet énoncé aux suites tendant vers $-\infty$.
Relations de comparaison : négligeabilité, équivalence.	Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
$u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$. Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances. Deux suites équivalentes ont le même signe à partir d'un certain rang. Deux suites équivalentes ont le même comportement asymptotique. Croissances comparées de n^α, a^n, $(\ln(n))^\beta$.	Exploiter ces résultats pour déterminer le comportement asymptotique de suites.

Limites, continuité et dérivabilité

Ce chapitre est divis{e en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise et démontre les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire dans le premier chapitre d'analyse.
Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles.
Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

A - Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe (a) consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite finie ou infinie en un point ou en $\pm\infty$	
Étant donné un point a qui appartient à I ou est une extrémité de I, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \lvert x - a\rvert \leqslant \delta \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \leqslant \varepsilon$.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la limite et le mettre en relation avec l'intuition géométrique. Notation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Adaptation au cas où f est définie sur $I \setminus \{a\}$. Notation $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\longrightarrow} \ell$. Adaptation au cas $\ell = \pm\infty$.
Si I n'est pas majoré alors on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, x \geqslant A \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \leqslant \varepsilon$.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la limite et le mettre en relation avec l'intuition géométrique. Notation $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Adaptations au cas $\ell = \pm\infty$, au cas d'une limite en $-\infty$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à gauche, limite à droite.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a. Image d'une suite de limite ℓ par une fonction admettant une limite en ℓ.	Exploiter ces résultats sur des exemples. Adaptation des énoncés relatifs aux suites.
b) Comparaison des fonctions	
Passage à la limite dans une inégalité	
Théorème de la limite monotone.	Démonstration hors programme.
Relations de négligeabilité et d'équivalence.	Adapter au cas des fonctions les définitions et les résultats étudiés sur les suites.
c) Continuité en un point	
Définition de la continuité de f au point a de I.	Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la limite Si a appartient à I, alors f est continue en a si et seulement si f a une limite finie en a ; sinon, f a une limite finie en a si et seulement si elle se prolonge par continuité en a.
Continuité à droite et à gauche.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Prolongement par continuité en un point.	
Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient, composition.	Exploiter ces résultats sur des exemples.

d) Continuité sur un intervalle

Définition. Opérations.	
Théorème des valeurs intermédiaires : si a et b sont deux réels, si f est continue sur $[a,b]$ et si γ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe c dans $[a,b]$ tel que $\gamma = f(c)$.	La démonstration n'est pas exigible. ⇆ I : application de la dichotomie à l'approximation d'un zéro d'une fonction continue.
Image d'un intervalle par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.

e) Continuité et bijectivité

Fonction bijective d'un intervalle I sur une partie de $\mathbb{R}$. Fonction réciproque.	Comparaison des représentations graphiques d'une bijection et de sa réciproque.
Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ (et de même monotonie que f).	Appliquer ce résultat sur des exemples.

B - Dérivabilité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité de f en a ; nombre dérivé : limite du taux d'accroissement.	Notation $f'(a)$ pour le nombre dérivé.
Équivalence avec l'existence d'un développement limité en a à l'ordre 1.	La droite d'équation $$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$ est appelée tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Cette définition peut être justifiée (limite de sécantes). Interprétation cinématique. ⇆ I : méthode de Newton.
Dérivabilité à droite et à gauche en a.	
Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.	Notation f' pour la fonction dérivée.

b) Opérations sur les fonctions dérivables

Si f et g sont dérivables en a, dérivabilité et dérivée en a de $f+g$, fg et, si $g(a) \neq 0$, de $\frac{f}{g}$.	
Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, dérivabilité et dérivée en a de $g \circ f$.	
Si f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J, si f est dérivable en a, condition nécessaire et suffisante de dérivabilité de f^{-1} en $f(a)$ et calcul de la dérivée. Extension aux opérations sur les fonctions dérivables sur un intervalle. En particulier, réciproque d'une bijection de classe $\mathscr{C}^1$.	Interprétation géométrique.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Propriétés des fonctions dérivables	
Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	
Inégalité des accroissements finis : si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, est telle que, pour tout $t \in]a,b[$, $\lvert f'(t)\rvert \leq M$, alors, pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, $\lvert f(x)-f(y)\rvert \leq M\lvert x-y\rvert$.	
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes parmi les fonctions dérivables.	Appliquer ces résultats sur des exemples.
Théorème de la limite de la dérivée : si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a.	Interpréter géométriquement ce résultat. Si ℓ est un nombre réel, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.
e) Dérivées d'ordre supérieur	
Pour k dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, fonction de classe C^k sur I.	Notations $f^{(k)}$, $D^k f$ pour la dérivée k-ième de f. Ensembles $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.
Opérations : somme, produit (formule de Leibniz), composée, réciproque.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées.

Intégration sur un segment

L'objectif de ce chapitre est de consolider, d'approfondir et d'étendre la notion d'intégrale étudiée en Terminale STL. La présentation de l'intégrale sur un segment s'appuie sur la notion d'aire, mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme. Le cas des fonctions à valeurs réelles est étendu sans difficulté au cas complexe.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Intégrale d'une fonction continue	
Fonction continue ; définition, opérations.	
Intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.	Interpréter géométriquement une intégrale. Modéliser une situation physique par une intégration. La construction est hors programme. Dans le cas d'une fonction à valeurs positives, on fait le lien avec l'aire du domaine sous la courbe.
Propriétés : linéarité, positivité, croissance, valeur absolue d'une intégrale (inégalité triangulaire). Inégalité de la moyenne : $\left\lvert \displaystyle\int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} \lvert f\rvert$ Notation $\displaystyle\int_c^d f$ ou $\displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(c,d) \in [a,b]^2$. Relation de Chasles. Une fonction continue et positive sur $[a,b]$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle. Extension aux fonctions à valeurs complexes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Calcul intégral	
Si f est une fonction continue sur I et si x_0 est un point de cet intervalle, alors $$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. En particulier, pour f de classe $\mathscr{C}^1$: $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.	Appliquer ce théorème sur des exemples. Deux primitives d'une fonction continue sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
Intégration par parties. Changement de variable.	Appliquer ces techniques au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu.
Primitives des fonctions usuelles.	Savoir reconnaître des primitives usuelles. Pour les fonctions rationnelles, on se limite à des cas simples : aucune théorie de la décomposition en éléments simples n'est au programme.
d) Formule de Taylor avec reste intégral	
Polynôme de Taylor à l'ordre n pour la fonction f au point a : $T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.	Notation du reste : $R_n(f)(x) = f(x) - T_n(f)(x)$
Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	Exploiter la formule de Taylor avec reste intégral pour établir des égalités, des inégalités.

Développements limités

L'objectif est la maîtrise du calcul des développements limités simples. Le calcul de développements limités à un ordre élevé n'est pas un objectif du programme ; il relève d'outils logiciels.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Définition, unicité, troncature.	Interpréter un développement limité d'ordre n comme approximation d'une fonction. Ramener un développement limité en 0 par translation. Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit.	
Composition, application au quotient.	Déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Intégration terme à terme d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point a de I d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Développements limités usuels.	Exploiter les développements limités usuels dans le cadre de calculs de développements limités simples. Exploiter les outils logiciels pour les développements limités compliqués. Les étudiants doivent connaître les développements limités à tout ordre en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $x \mapsto \ln(1+x)$,

b) Applications des développements limités

Aucune théorie n'est attendue dans ce paragraphe. On illustrera seulement les différents cas de figure.

Calcul de limites.	Utiliser les développements limités pour lever une forme indéterminée.
Étude locale d'une fonction.	Déterminer, grâce à un développement limité, un prolongement par continuité, la dérivabilité, la nature d'un extremum, une tangente et sa position relative par rapport à la courbe. Aucun résultat général n'est exigible. Déterminer les éventuelles asymptotes et leurs positions relatives locales.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Le programme se limite à l'algèbre linéaire sur les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Après l'approche numérique du chapitre « Algèbre linéaire I » on passe à une vision plus géométrique. Les trois grands th'emes traités sont les espaces vectoriels, la théorie de la dimension finie et les applications linéaires.

Dans le sous-chapitre « A - Espaces vectoriels » on généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans...

Le sous-chapitre« B - Théorie de la dimension » vise à définir la dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. La notion de dimension interprète le nombre de degrés de liberté pour un problème linéaire.

L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels au sous-chapitre « C - Applications linéaires ». Son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires.

Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à une dimension supérieure.

Au moins deux approches pédagogiques sont possibles :

- *Traiter ce chapitre selon l'ordre présenté ci-dessous, en l'illustrant notamment sur les espaces $\mathbb{K}^n$ à l'aide des techniques de pivot développées dans le chapitre « Systèmes linéaires et calcul matriciel ».*
- *Mettre en place les différentes notions (sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, applications linéaires) dans le cas particulier des espaces $\mathbb{K}^n$ avant de les étendre aux espaces vectoriels généraux.*

Il est attendu des étudiants qu'ils sachent reconnaître une situation linéaire et la modéliser à l'aide d'une représentation adaptée dans un espace bien choisi dont on détermine la dimension.

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires

a) Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\Omega}$ pour Ω non vide (cas particulier des suites) et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Produit d'une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	
Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition et caractérisation. Droites et plans vectoriels.	Identifier un ensemble comme un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
L'ensemble des solutions d'un système homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.	
L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.	Appréhender le concept d'espace vectoriel de fonctions.
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
Intersection de sous-espaces vectoriels. Somme de deux sous-espaces F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.	
La somme $F+G$ est dite directe si l'écriture d'un vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.	Démontrer qu'une somme directe par la caractérisation $F \cap G = \{0\}$. Déterminer l'unique décomposition d'un vecteur donné dans une somme directe. Notation $F \oplus G$.
Sous-espaces supplémentaires.	

b) Familles finies de vecteurs

Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.	
Famille libre, famille liée.	Déterminer si une famille donnée est libre ou liée.
Toute famille de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ non nuls et de degrés échelonnés est libre.	
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	Déterminer si une famille est génératrice.
Bases.	Exemples usuels : bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Coordonnées dans une base.	Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans une base donnée. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} x$
Base adaptée à une somme directe.	Inversement, si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

B - Espaces vectoriels de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires

a) Dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.	
Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.	Application à l'existence d'une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie.
Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base.	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension.	Notation $\dim(E)$.
Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si E est dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.	

b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales.	Démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide d'une inclusion et de l'égalité de leurs dimensions.
Supplémentaires d'un sous-espace.	Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide de la caractérisation par l'intersection nulle et la somme des dimensions.
Dimension de la somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	Cas d'une somme directe.

c) Famille finie de vecteurs

Rang d'une famille finie $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Notation $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$. Une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$.

C - Applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Endomorphismes, isomorphismes et automorphismes.	
Identité, homothéties	Notation Id_E.
Combinaison linéaire et composée d'applications linéaires.	Notations $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{L}(E)$. Règles de calcul dans ces espaces.
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.	Notation $\mathrm{GL}(E)$ pour le groupe linéaire.
Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel.	
Image et noyau. L'image par une application linéaire u d'une famille génératrice de E est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.	Déterminer une base de l'image, du noyau d'une application linéaire. Caractériser l'injectivité à l'aide du noyau et la surjectivité à l'aide de l'image. Notations $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$.

b) Isomorphismes

Une application linéaire de E dans F est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une base de E en une base de F.	
Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.	Cas particulier des automorphismes. Contre-exemples en dimension infinie.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Modes de définition d'une application linéaire	
Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.	

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Rang d'une application linéaire	
Application linéaire de rang fini.	$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$
Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$.	La démonstration est hors programme.
f) Équations linéaires	
Une équation, d'inconnue $x \in E$, est dite linéaire si elle est de la forme $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.	Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. La notion de sous-espace affine est hors programme.

Matrices

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations	
Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	Notation : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Matrices carrées, matrices triangulaires, matrices diagonales.	
Somme de deux matrices. Multiplication par un scalaire.	Interpréter le produit AX d'une matrice par une colonne comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit de deux matrices.	Interpréter la j-ème colonne du produit AB comme le produit de A par la j-ème colonne de B. Interpréter la i-ème ligne du produit AB comme le produit de la i-ème ligne de A par B.
Formule du binôme.	Calculer les puissances de matrices carrées.
b) Matrices inversibles	
Matrice carrée inversible. Inverse. Ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles.	Caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée A par l'existence et l'unicité de la solution de tout système de la forme $AX = B$ où X et B sont deux matrices colonnes. Caractériser l'inversibilité par le nombre de pivots. Reconnaître une matrice inversible et calculer son inverse. On admet que l'inversibilité à droite entraîne l'inversibilité à gauche et réciproquement. Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour le groupe linéaire d'ordre n. Toute théorie générale des groupes est exclue.
Inverse du produit de matrices inversibles.	La notion de comatrice est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à une matrice	
On peut identifier les éléments de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ avec des matrices colonnes.	
Application $X \mapsto AX$. Linéarité.	
L'image AX est combinaison linéaire des colonnes de A. Image et noyau d'une matrice.	Déterminer des équations de l'image et du noyau de A. On utilise l'échelonnement d'un système pour déterminer des équations de l'image.
d) Représentation matricielle en dimension finie	
Matrice d'une application linéaire u dans un couple de bases.	Exprimer les coordonnées de $u(x)$ en fonction de celles de x. Notation : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, où $\mathscr{B}$ est une base de l'espace de départ et $\mathscr{C}$ une base de l'espace d'arrivée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ dans le cas où $\mathscr{B} = \mathscr{C}$.
Un couple de bases étant fixé, isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Application au calcul de la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$. Matrice d'une composée. Lien entre matrice inversible et isomorphisme. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.	
e) Rang d'une matrice	
Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Défini comme le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$ ou, de manière équivalente, comme le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associée. On admet que le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.
Le rang d'une matrice A est égal au nombre de pivots du système linéaire $AX = B$. Le rang d'une famille de vecteurs de E est égal au rang de sa matrice dans une base. Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans un couple de bases. Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang. Conservation du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible.	Calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire par la méthode du pivot.

Probabilités sur un univers fini

Ce chapitre a pour objectifs de mettre en place un cadre théorique permettant de fonder l'étude des probabilités dans le cas d'un univers fini et de développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste. On enrichit le point de vue fréquentiste étudié au lycée par une formalisation ensembliste. On mettra l'accent sur des exemples issus de la vie courante ou provenant des autres disciplines. On se limite en première année au cas des probabilités sur un univers fini.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces probabilisés finis	
Expérience aléatoire. L'ensemble des issues (ou résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.	On se limite au cas où l'univers Ω est fini.
Événement défini comme une partie de Ω, événement élémentaire défini comme un singleton. Événement certain, événement impossible, événement contraire, événements incompatibles. Opérations sur les événements. Système complet d'événements.	Notation de l'événement contraire : $\overline{A}$.
On appelle probabilité sur un ensemble fini Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega)=1$ et, pour tout couple (A,B) de parties disjointes de Ω, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.	
Probabilité de l'union de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance d'une probabilité.	
Si $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ et $p_1,\dots,p_n$ sont des réels positifs de somme 1, il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que : $$\forall i\in [\![1,n]\!],\ P(\{\omega_i\})=p_i$$	À partir de la donnée des p_i, calculer la probabilité d'un événement. Choisir les valeurs des p_i revient à choisir un modèle probabiliste.
Équiprobabilité (ou probabilité uniforme).	
b) Indépendance et conditionnement	
Probabilité conditionnelle.	Représenter une expérience aléatoire à l'aide d'arbres de probabilités. La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique fréquentiste. Notations : $P(B\mid A)$ ou $P_A(B)$.
Formules des probabilités composées, des probabilités totales et formule de Bayes.	
Indépendance de deux événements. Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	

Variables aléatoires sur un univers fini

La notion de variable aléatoire modélise le résultat d'une expérience aléatoire. L'utilisation des variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite aux variables aléatoires sur un univers Ω fini.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Variables aléatoires	
Variable aléatoire réelle. Loi de probabilité et fonction de répartition.	Déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. La connaissance des propriétés générales des fonctions de répartition n'est pas exigible.
Image d'une variable aléatoire par une application.	
b) Couples de variables aléatoires	
Loi conjointe.	Étant données deux variables aléatoires X et Y, définies sur Ω, la loi du couple (X,Y) est appelée loi conjointe de X et Y.
Lois marginales.	Les lois de X et de Y sont appelées lois marginales de (X,Y).
Loi conditionnelle.	Si x est un élément de $X(\Omega)$ tel que $P(X=x)>0$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ est la probabilité définie sur $Y(\Omega)$ par : $$\forall A \in \mathscr{P}(Y(\Omega)),\ P_{Y\mid X=x}(A) = P(Y \in A \mid X = x).$$
c) Couples de variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X=x \cap Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$	Si X et Y sont indépendantes, alors, pour tout x élément de $X(\Omega)$, la loi conditionnelle $P_{Y\mid X=x}$ est égale à la loi marginale P_Y.
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour tout $(A,B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(X \in B).$$	Démonstration hors programme.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si f et g sont des applications définie respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	Démonstration hors programme.
d) Espérance d'une variable aléatoire	
Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P([X = x_k])$$	Interpréter l'espérance en terme de moyenne pondérée.
Variable centrée.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire réelle à valeurs finies et φ une application définie sur $X(\Omega)$, alors l'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ est donnée par la formule $E(\varphi(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P([X = x])$.	Démonstration non exigible.
En particulier, $E(aX + b) = aE(X) + b$ pour a et b deux réels donnés. Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.	On admet de manière plus générale la linéarité de l'espérance.

e) Variance et écart type d'une variable aléatoire

Définition de la variance et de l'écart type d'une variable aléatoire. Variable réduite. Formule de König-Huygens. $V(aX + b) = a^2 V(X)$ pour a et b deux réels donnés.	Interpréter la variance comme indicateur de dispersion.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	L'inégalité de Markov n'est pas au programme.

f) Lois usuelles

Loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli et loi binomiale. Espérance et variance de ces lois.	Reconnaître des situations modélisables par ces lois. La loi hypergéométrique n'est pas au programme.